XVI
Congreso Nacional de
Investigación Educativa
CNIE-2021

Análisis de un diseño instruccional fundamentado en la teoría APOE utilizando GeoGebra

Francisco Javier Anaya-Puebla
200928035@g.upn.mx

Área temática 18. Tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en educación.
Línea temática: Estudiantes y TIC.
Porcentaje de avance: 15%.
Trabajo de investigación educativa asociada a tesis de grado.
Programa de posgrado: Doctorado en Educación en la Línea de Generación y Aplicación de Conocimiento (LGAC): Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación.
Institución donde realiza los estudios de posgrado: Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco.

Resumen

En este trabajo se presenta un diseño instruccional fundamentado en la teoría APOE y el análisis de las respuestas proporcionadas por profesores participantes en un taller llevado de manera virtual, adicionalmente se caracterizó el uso de la tecnología en el diseño. Los resultados proporcionan evidencia de la utilidad de la tecnología y de la pertinencia de utilizar actividades fundamentadas en la modelación matemática.

Palabras clave: *Aprendizaje de las Matemáticas, Álgebra, GeoGebra, Modelación matemática.*

Introducción

Los sistemas de ecuaciones lineales son parte del currículo desde la educación básica (específicamente en el segundo grado de secundaria en México), en el nivel medio superior y posteriormente en el nivel superior en áreas de ciencias exactas, ingenierías y ciencias sociales, en donde se han utilizado para modelar problemas de flujo de redes (hidráulicas, eléctricas, tráfico), balance de ecuaciones químicas, producción y demanda, ajuste polinomial, entre otros. No obstante, distintos autores han reportado dificultades en la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución tanto en secundaria (por ejemplo Oktaç, 2018; Panizza, Sadovksy, y Sessa, 1999) e incluso en el nivel superior (por ejemplo Ramírez-Palacios, Oktaç, y García, 2002; Trigueros, Oktaç, y Manzanero, 2007; Zandieh y Andrews-Larson, 2019).

Tomando en cuenta algunas de las dificultades referidas en las investigaciones citadas anteriormente se diseñó un libro GeoGebra, el cual consiste en una colección de actividades GeoGebra, las cuales se organizan en capítulos. Las actividades, que corresponden a las hojas del libro, permiten insertar texto, videos, applets GeoGebra (nuevas o existentes), imágenes, notas de GeoGebra, archivos en formato de documento portátil (PDF por sus siglas en ingles), preguntas GeoGebra (abiertas o de opción múltiple) y por último, URL de páginas web.

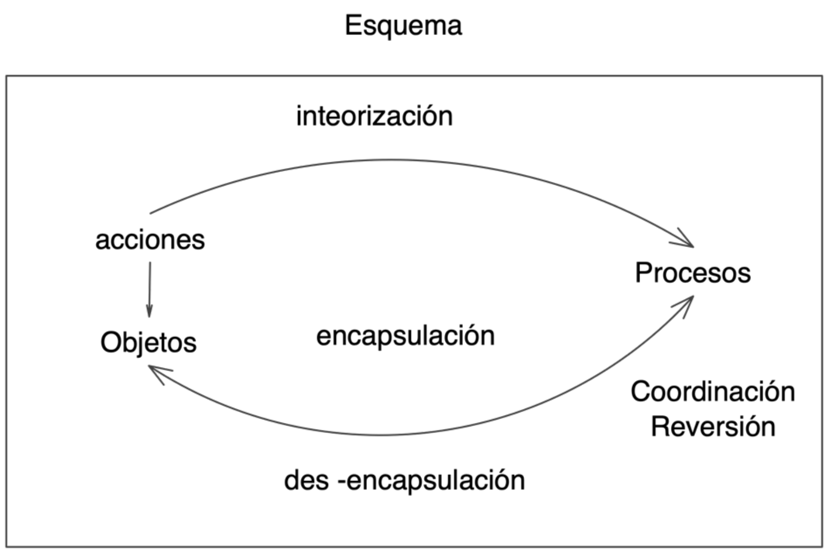
En esta ponencia se presentarán resultados preliminares obtenidos a partir de un pilotaje del diseño instruccional el cual se aplicó con profesores asistentes a un taller impartido en el VII Taller Internacional Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación (TEMBI7) en alianza con la Comunidad GeoGebra Latinoamericana realizado del 11 al 14 de noviembre de 2020 en modalidad virtual. El objetivo del trabajo es presentar una actividad que formó parte del diseño instruccional del taller impartido en el TEMBI7 denominado “GeoGebra como herramienta para la enseñanza de Sistemas de Ecuaciones Lineales”, además de las respuestas entregadas por los participantes; las preguntas que nos propusimos responder son ¿qué papel juegan las tecnologías en el diseño e implementación de la actividad planteada?, ¿la actividad propuesta promueve la construcción de las estructuras mentales propuestas por la descomposición genética?

Desarrollo

A continuación expondré brevemente los fundamentos teóricos que guiaron el diseño del tratamiento instruccional: teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema), modelación matemática y por último el uso de la tecnología en el aula de matemáticas. Posteriormente presento el análisis de uno de los capítulos del libro que consiste en un problema de modelación de una red de tráfico.

La teoría APOE (Arnon et al., 2014) es principalmente un modelo para describir cómo los conceptos matemáticos pueden ser aprendidos; considera mecanismos mentales (interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, desencapsulación, tematización y generalización) a partir de los cuales son construidas las estructuras mentales. La Figura 1 ilustra las relaciones entre las estructuras y mecanismos, mismos que se describen a continuación de manera resumida: una acción es una transformación de un objeto matemático que el individuo percibe como externo y necesita instrucciones externas explícitas para ser realizada; un proceso es construido a partir de los mecanismos de interiorización o coordinación, y en este sentido un proceso se percibe como interno y significativo; los procesos son encapsulados en objetos y entonces es posible aplicar acciones a estos objetos, en algunas ocasiones es necesario desencapsular el objeto para volver al o los procesos que dieron origen a él. Según la teoría APOE, los individuos se enfrentan a situaciones problemáticas matemáticas mediante la construcción y aplicación de estructuras mentales en su esfuerzo por comprender conceptos matemáticos.

Figura 1. Mecanismos y estructuras mentales para la construcción de conocimiento matemático



Nota: Adaptado de APOS Theory (p. 10), por Arnon et al., 2014, Springer New York.

Utilizando las estructuras teóricas se diseña un modelo explícito conocido como descomposición genética, que es un modelo hipotético que describe las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante podría necesitar para aprender un concepto matemático específico. Este modelo se utiliza como herramienta de investigación para analizar las construcciones de los estudiantes, y para diseñar tareas y actividades en el desarrollo de secuencias didácticas destinadas a fomentar las construcciones propuestas (Arnon et al., 2014).

Por otra parte, investigaciones acerca de la modelación en Álgebra Lineal muestran que debido a la complejidad de la construcción de los objetos abstractos, el uso de actividades de modelación pueden propiciar las condiciones para que los estudiantes usen su conocimiento y se confronten ante nuevas necesidades conceptuales, las cuales pueden atenderse en el proceso de enseñanza, mediante actividades adicionales que ayuden a los estudiantes a construir su aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal (Possani, Trigueros, Preciado, & Lozano, 2010).

De igual modo, permite a los estudiantes desarrollar conceptos matemáticos importantes cuando trabajan con problemas en contextos reales significativos (Trigueros, Possani, Lozano, & Sandoval, 2009).

Con respecto al uso de tecnología consideramos la caracterización de diferentes usos de tecnologías digitales que hacen los profesores en sus clases de matemáticas propuesta por Sandoval (2016, p. 130):

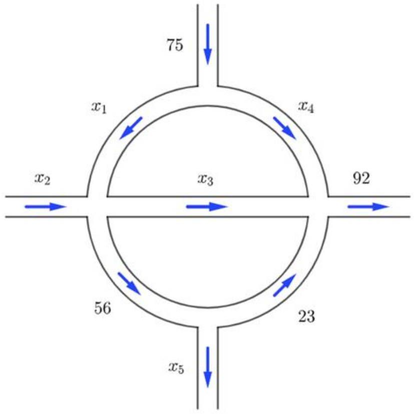
> **Como reemplazo:** este uso es cuando se utiliza la tecnología digital como cualquier otra sin que ello implique cambios en las prácticas de enseñanza ni en el aprendizaje. En este caso su uso está centrado en la enseñanza y es considerado como un auxiliar. Ejemplo de acciones que se promueven son para: proyectar, explicar, ejemplificar, motivar, dirigir la clase, completar información, entre otros.
>
> **Como amplificador:** en este caso se eligen y usan tecnologías digitales para realizar acciones –por parte del profesor o el alumno– de manera eficiente y eficaz. Ejemplos de este uso son para comprobar un resultado, realizar un cálculo más rápido, ilustrar o simular experimentos. Sin embargo, las acciones siguen centradas en la labor de enseñanza y se identifican pocos cambios en las tareas de la enseñanza o del aprendizaje.
>
> **Como transformador:** en este caso, se eligen y usan estas herramientas de manera que promuevan el aprendizaje. Acciones que identifican este tipo de uso son explorar, comparar, conjeturar, validar, trabajo en equipo/cooperativo, así como experimentar. Lo que se pretende entonces es que estas herramientas contribuyan a la comprensión de contenidos matemáticos.

Considerando los elementos teóricos expuestos anteriormente se diseño el libro GeoGebra (disponible en https://www.geogebra.org/m/pvpdn7pr), en este trabajo se abordará el capítulo tercero que corresponde a un problema de modelación de redes que se pueden abordarse mediante sistemas de ecuaciones lineales.

El problema propuesto está vinculado con el flujo vehicular en una rotonda, para resolver el problema planteado los estudiantes deberán modelar las relaciones de entradas y salidas en todo el sistema y en cada uno de los nodos mediante un sistema de ecuaciones lineales y posteriormente resolver el sistema, ya sea a lápiz y papel o mediante el uso del CAS de GeoGebra. Cabe mencionar que este problema se adaptó de un problema propuesto por la organización Why U (Why-U, 2017).

Una vez que los estudiantes han propuesto un sistema para resolver la tarea con la intensión de estandarizar la notación a utilizar se propone el sistema de ecuaciones que ayudará a resolver el problema (ver Figura 2).

Figura 2. Modelo de la rotonda y sistema de ecuaciones lineales



$$
\begin{aligned}
x_2 + 75 &= x_5 + 92 \\
x_1 + x_2 &= x_3 + 56 \\
75 &= x_1 + x_4 \\
x_3 + x_4 + 23 &= 92 \\
56 &= x_5 + 23
\end{aligned}
$$

Nota: Elaboración propia.

Considerando el tamaño del sistema es conveniente utilizar el CAS de GeoGebra para el resolver el sistema, no obstante, el resultado que devuelve la aplicación requerirá que los estudiantes interpreten y den sentido a la solución (ver Figura 3), el uso del CAS en este caso cumple una función de amplificación, ya que permite realizar el cálculo más rápido además de eliminar posibles errores en los cálculos al resolver el sistema por eliminación gaussiana.

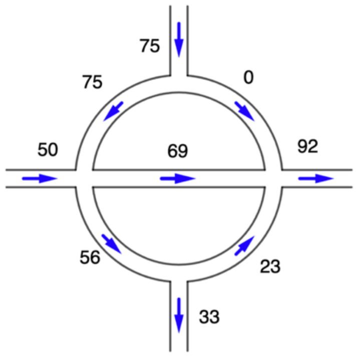
Figura 3. Resolución de un sistema con infinitas soluciones en CAS de GeoGebra

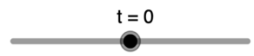
$$\text{Resuelve}(\{x_2 + 75 = x_5 + 92, x_1 + x_2 = x_3 + 56, 75 = x_1 + x_4, x_3 + x_4 + 23 = 92, 56 = x_5 + 23\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\})$$

$$\rightarrow \{\{x_1 = -x_4 + 75, x_2 = 50, x_3 = -x_4 + 69, x_4 = x_4, x_5 = 33\}\}$$

En este caso el estudiante deberá interpretar y dar sentido al conjunto solución identificando que se trata de un sistema con infinitas soluciones en donde las variables x_1, x_3 están en función de x_4, además deberán identificar que la solución deberá estar en el conjunto de los enteros positivo, pues se trata de vehículos en circulación en una rotonda. En caso de ser necesario se puede recurrir a un applet de GeoGebra que modela el conjunto solución (ver Figura 4), el cual está disponible en https://www.geogebra.org/m/ck6hccse.

Figura 4. Modelación del conjunto solución del problema de la rotonda





$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 75 \\ 50 \\ 69 \\ 0 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 50 \\ 69 \\ 0 \\ 33 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Nota: Elaboración propia.

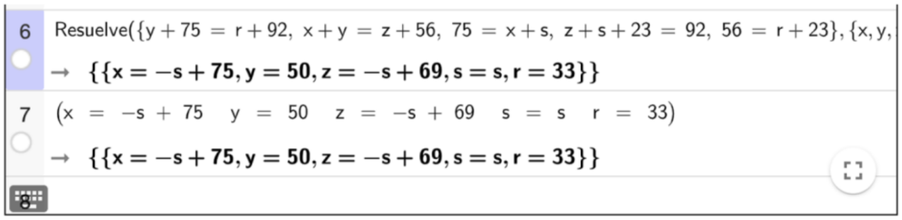
El deslizador *t* permite asignar valores enteros al parámetro y así, determinar los flujos en los segmentos faltantes y especialmente a los que están en función de x_4, el modelo permite provocar la reflexión en los estudiantes con preguntas como ¿qué interpretación tienen los números negativos en el esquema de la rotonda? o ¿es posible cerrar la circulación en alguno de los segmentos y continuar con la circulación?

Como se mencionó anteriormente el tratamiento instruccional se piloteo con profesores asistentes al TEMBI7, el taller consistió en dos sesiones de 90 minutos las cuales se realizaron por video llamada utilizando Google Meet. En la primera sesión se abordaron sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ y se explicó el uso del CAS de GeoGebra para resolver sistemas de ecuaciones lineales, al finalizar la sesión se presentó el problema de la rotonda y se les pidió a los profesores que enviaran sus evidencias por un formulario de Google. En la segunda sesión se discutió sobre las respuestas recibidas y se continuó con las actividades plateadas para el taller. El taller contó con la participación de 22 asistentes, de los cuales el 68.2% fueron docentes en activo, de los diecisiete docentes en activo el 17.6% corresponden a educación básica, 76.5% en nivel medio superior y 5.8% nivel superior. Con respecto al último grado de estudios de los asistentes, el 9% bachillerato, 41% licenciatura, 45% maestría y 5% doctorado.

En el caso del problema de la rotonda, cinco de siete participantes que enviaron sus respuestas se limitaron a dar la solución matemática, ya sea calculada a lápiz y papel o la respuesta que proporciona el CAS de GeoGebra, por ejemplo la Figura 7 muestra la respuesta proporcionada por uno de los participantes en la que se muestra que aunque se estandarizó la notación, el profesor utilizó una notación diferente y omitió dar una interpretación al conjunto solución.

Figura 7. Respuesta incompleta al problema de la rotonda

Usando CAS



Donde

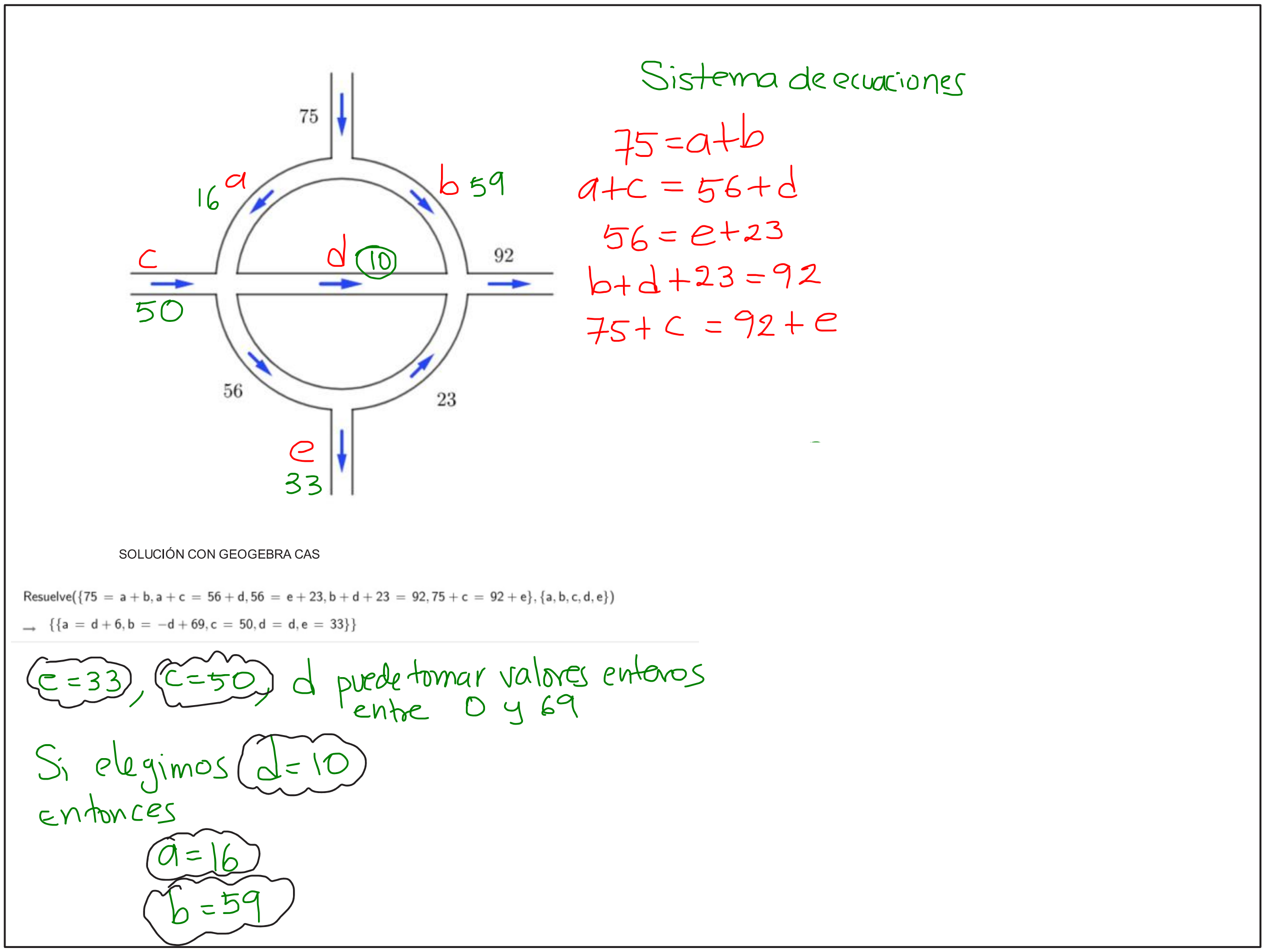
x1= x
x2=y
x3=z
x4=s
x5=r

Nota: respuesta enviada por uno de los profesores por formulario de Google.

El ejemplo anterior ejemplifica el uso del CAS de GeoGebra exclusivamente como herramienta amplificadora, es decir, permite ahorrar tiempo en la resolución del sistema de ecuaciones y posibles errores en su solución. En términos de la teoría APOE podemos identificar que los profesores se limitaron a realizar acciones, incluso dichas acciones son realizadas por el CAS, si bien el software devuelve el conjunto solución es necesario replantear las ecuaciones en términos de la variable libre, para el caso del ejemplo x_4=s. Aunque el cambio de notación en las variables parece una estrategia valida y que facilita la captura en el CAS esto podría generar confusión debido a que de manera general se suelen nombrar a los parámetros por ejemplo con las letras *r,s* y *t.*

La figura 8 muestra la solución proporcionada por otro profesor, el cual si bien utilizó variables diferentes, utilizó correctamente el CAS e interpretó el conjunto solución, identificando como variable libre a d y reconoció que debe tomar valores enteros positivos entre 0 y 69, además proporcionó una solución particular.

Figura 8. Respuesta correcta al problema de la rotonda



Nota: respuesta enviada por uno de los profesores por formulario de Google.

El ejemplo de la Figura 8, muestra como el profesor cambia nuevamente la notación propuesta por una más sencilla de introducir en el CAS, en este caso el software funciona nuevamente como amplificador, pero el profesor es capaz de desencapsular el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales e identificar las restricciones de impuestas por el contexto del problema y en especial por la ecuación $b=-d+69$. Como plantean Trigueros et al. (2009) para la interpretación del conjunto solución es necesario pasar de interpretar las variables solo como incógnitas a interpretarlas en una relación funcional, lo que necesita que el sujeto sea capaz de comprender la variación conjunta de las variables.

Consideraciones finales

Del análisis del diseño de la actividad y de los resultados del pilotaje podemos identificar y clasificar el uso de distintas tecnologías como (Ver Tabla 1):

Tabla 1. Caracterización de las tecnologías utilizadas en el diseño y aplicación

Categoría	Tecnología	Descripción
Reemplazo	Google Meet	Considerando que el taller se realizó de manera virtual Google Meet funcionó como reemplazo de el aula física.
	Formularios de Google	Entregas a lápiz y papel vs entrega de documentos digitales
	Libro GeoGebra	Organizar las tareas y trabajos en un medio accesible para los participantes
Amplificador	CAS de GeoGebra	Facilitando en el trabajo algorítmico de la solución del sistema de ecuaciones
	Simulador de conjunto solución	La construcción permite ejemplificar el comportamiento del conjunto solución al asignar valores a un parámetro.
Transformador	-	-

Nota: elaboración propia utilizando la caracterización propuesta por Sandoval (2016).

La Tabla 1 muestra que el uso de la tecnología se concentró en la categoría de reemplazo, esto puede explicarse debido al cambio que impuso la pandemia por la COVID-19 en la cual la tecnología se incluyó en las aulas como una posible estrategia de solución, no obstante la actividad y su pilotaje dio cuenta sobre el posible uso del CAS de GeoGebra como un amplificador.

Si bien la mayoría de los profesores que enviaron sus respuestas a la primera actividad omitieron hacer una interpretación de los resultados proporcionados por el CAS, es decir, se limitaron a realizar acciones al sistema de ecuaciones lineales, después de la discusión con la que se inició la segunda sesión los profesores inmediatamente identificaron el error y en las siguientes actividades siempre regresaron al contexto del problema e interpretaron la solución proporcionada por el software.

El uso de problemas en contextos reales y la modelación ayudó a captar la atención de los asistentes al taller como lo han reportado distintas investigaciones (Possani et al., 2010; Trigueros et al., 2009), la experiencia vivida por los profesores nos permitió reflexionar durante la discusión sobre la utilidad de la modelación en el aula de matemáticas y que incluso siendo profesores podemos cometer los mismo errores que los alumnos, por ejemplo el no interpretar el resultado obtenido.

Si bien el pilotaje con los profesores y la retroalimentación obtenida durante la discusión con ellos da cuenta de la viabilidad de utilizar el tecnología en el aula de clase y sus papel como amplificador, surgen preguntas que aún debemos contestar, por ejemplo ¿cómo utilizar las distintas aplicaciones de GeoGebra (CAS, GeoGebra Clásico e incluso la Realidad Aumentada de GeoGebra) para que contribuyan a la comprensión de contenidos matemáticos (transformador)?, ¿cómo diseñar actividades para que el uso de la tecnología ayude a los estudiantes a realizar las construcciones mentales propuestas por la teoría APOE?.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory. En *APOS Theory*. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Oktaç, A. (2018). Conceptions About System of Linear Equations and Solution. En S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 71–101). https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_4

Panizza, M., Sadovksy, P., & Sessa, C. (1999). La Ecuación Lineal Con Dos Variables : Entre la Unicidad y el Infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, *17*(3), 453–461.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M.-D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, *432*(8), 2125–2140. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.004

Ramírez-Palacios, M. C., Oktaç, A., & García, C. (2002). Dificultades que Presentan los Estudiantes en los Modos Geométrico y Analítico de Sistemas de Ecuaciones Lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19*, 413–418.

Sandoval Cáceres, I. T. (2016). Matemáticas Y Tecnología Digital : Enseñanza Y Aprendizaje En La Era Digital. En A. R. María Estela (Ed.), *¿Qué aprender? ¿Cómo evaluar? Dilemas Iberoamericanos* (pp. 126–133). México: UPN.

Trigueros, M., Oktaç, A., & Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, *5*, 2359–2368.

Trigueros, M., Possani, E., Lozano, M.-D., & Sandoval, I. (2009). Learning Systems Of Linear Equations Through Modelling. *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *5*(July), 225–232.

Why-U. (2017). Algebra 62 - Gauss Jordan Elimination with Traffic Flow - YouTube. Recuperado el 15 de febrero de 2021, de https://www.youtube.com/watch?v=Wa6kaCwyYRk&feature=youtu.be

Zandieh, M., & Andrews-Larson, C. (2019). Symbolizing while solving linear systems. *ZDM - Mathematics Education, 51*(7), 1183–1197. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01083-3