La Iteración de la Subunidad. Conceptualizando las Fracciones Impropias desde la Educación Matemática Realista

Ivette Anel Delgado Valdez
Universidad Pedagógica Nacional 321
ivette.delgado8@hotmail.com
Christine Janet Luna de la Rosa
Universidad Pedagógica Nacional 321
libelulas21@hotmail.com
Luis Manuel Aguayo Rendón
Universidad Pedagógica Nacional
Luisaguayo726@gmail.com

Área temática: Educación en campos disciplinares
Línea temática: Educación Matemática
Tipo de ponencia: Reporte parciales o final de investigación

Resumen

En esta ponencia se presenta una propuesta alternativa para la enseñanza de las fracciones con seis prácticas matemáticas desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista y los Experimentos de Diseño, en ella se prioriza la comparación de medidas de longitud.En este trabajo se analiza la tercera práctica de una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) que permite a los alumnos construir la noción de fracción impropia a través de las ideas multiplicativas al iterar una subunidad, con ello se pretende dar a conocer los resultados en torno de las normas matemáticas necesarias para lograr una reinvención de las fracciones impropias a partir de la utilización de una narrativa sobre un grupo prehispánicos (los Acajay) que utiliza ciertas herramientas para solucionar sus problemas de medidas.

Palabras clave: fracciones impropias, aprendizaje de las matemáticas, propuesta de enseñanza, magnitud continua

Introducción

La enseñanza de las matemáticas en México, como en muchos otros países, no ha alcanzado los resultados esperados en cuanto a los aprendizajes en la Educación Básica, las causas pueden ser variadas, sin embargo en este trabajo nos ocupa un contenido en especial: las fracciones.

Las fracciones, como números racionales, responden a diversas representaciones (significados de la fracción) según el problema que estén resolviendo: medida, cociente, razón, operador o parte de un todo; para nosotros, hacer que los alumnos se apropien de todos estos significados es uno de los principales problemas en la enseñanza de la fracción, pues entenderla desde el modelo de Kieren (1980) ha llevado a que los docentes no encuentren una ruta adecuada para didactizarla con los alumnos.

Los obstáculos epistemológicos que el alumno enfrenta al aprender las propiedades de los números fraccionarios y su relación con los números decimales, es considerado uno de los primeros problemas en su enseñanza; los conocimientos previamente adquiridos que le fueron útiles para comprender un concepto matemático, influyen en la comprensión de otro más complejo (Llinares y Sánchez, 1997), por ejemplo la relación mayor o menor no tiene el mismo sentido en los números naturales que fraccionarios.

No obstante, en las propias dificultades que las fracciones presentan, se encuentra una problemática que podría ser prevenida y ayudar a atenuar los obstáculos epistemológicos: desde el campo de la didáctica reconocemos el primer acercamiento a este objeto matemático como un problema, ya que para su enseñanza se privilegia las idea de parte-todo, es decir un todo que es dividido en un cierto número de partes de forma congruente y que, a su vez, cada una de las partes responde a un subconjunto del cual se pueden tomar uno o varios "pedazos". Uno de los ejemplos más comunes vistos en las aulas es la partición de pizza, pasteles o chocolates para tomar pedazos de ellos.

En un primer momento y por la facilidad que representa la comprensión de la equipartición, la enseñanza de "tantos de tantos" se considera como una vía sencilla y rápida para comprender las fracciones en su idea de fracción unitaria (, ...) o fracciones propias (, ...); pues las representaciones gráficas permiten al alumno visualizarla de manera sencilla, sin embargo Cortina et al. (2013) encuentran en esta idea una limitante de comprensión, pues al dividir un "entero" la fracción se ve siempre contenida dentro de este.

Marco teórico

Para Freudenthal (1983) enseñar la fracción desde el significado parte todo resulta ser "un comienzo muy limitado" que hace de su aprendizaje algo muy pobre y corto, pues privilegia la comprensión de la fracción propia y dificulta comprender la noción de fracción impropia; es sencillo entender como una pizza dividida en cinco partes de la cual se han tomado tres, pero qué pasa cuando son ¿Cómo tomar siete partes de algo que está dividido en cinco? ¿Deja de existir el entero para haber dos enteros? ¿Es lo mismo la unidad que el entero?

En la siuación anterior, la palabra fracción alude a la idea de que algo ha sido partido en partes y que además, está siempre contenido en la unidad, lo cual implica que la fracción se traduzca en algo menor o igual a la unidad (); este es otro de los problemas que los alumnos enfrentan al trabajar con el concepto, ya que esta forma de concebir las fracciones "obstruye el hecho de que los estudiantes entendieran a las fracciones como un número que puede cuantificar el tamaño relativo a algo que está separado" (Corina et al., 2013, p. 14); es decir se privilegian las magnitudes discretas con el conteo y no las magnitudes continuas con la medición.

Los problemas mencionados son el principio de muchas más dificultades que se observan en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las fracciones, por esta razón autores como Ávila (2006); Cortina (2013); Llinares (2014); Thompson y Saldanha (2003) y Valdemoros (2010) han centrado sus esfuerzos en estudiar la forma de erradicar dichas dificultades. En ese sentido la propuesta de Cortina, Zúñiga y Visnovska es una de las que consideramos más viables para orientar la enseñanza de las fracciones, ya que su propuesta parte de una idea fundametal: cuando se reconoce a la fracción como un número en sí mismo capaz de cuantificar y expresar una cantidad, no lo limitamos a estar dentro de una unidad, sino que lo podemos percibir como un número que puede ser menor, igual o mayor a la unidad de referencia.

Considerando lo anterior podemos plantearnos las siguientes preguntas de investigación: ¿Cuál es el alcance de una TEDE y de las normas matemáticas para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones impropias? ¿El contexto de medida resulta favorable para reconstruir el significado de fracción como un número capaz de cuantificar? Estas cuestiones nos llevan a plantear los siguientes objetivos de investigación:

- Analizar y describir el alcance de la TEDE y las normas matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones impropias.
- Describir los alcances de la enseñanza de las fracciones impropias en el contexto de medida para la reconstrucción de su significado y el reconocimiento de éstas como un número capaz de cuantificar.

La propuesta que se presenta en esta investigación recorre un camino a través de una TEDE que se inscribe en la Educación Matemática Realista (EMR) de Freudenthal (1983) y la Teoría Hipotética de Aprendizaje de Cobb (et al., 2003). El diseño de la propuesta inició con la revisión y análisis de la literatura existente en el campo que se utiliza para puntualizar los objetivos principales de aprendizaje (Cobb et aal., 2003) y posteriormente diseñar una TEDE cuyo objetivo es que los alumnos comprendan las fracciones como un número que cuantifica en el contexto de medida, de tal manera que la unidad y subunidad no estén contenidas dentro una de la otra, lo cual permitirá que los alumnos puedan visualizar la fracción como un número independiente.

El rol de la EMR es fundamental para entender los procesos que se vivieron en las sesiones de clase donde se desarrolló la TEDE, gracias a los principios de la EMR alumnos y docente estarán inmersos en un experimento de enseñanza que los ayudara a comprender las fracciones de una forma diferente a la que usualmente comienza con el significado parte-todo. El principio de realidad ayudó a los alumnos a ubicarse dentro de la historia de los Acajay (narrativa de un antiguo pueblo mesoamericano) quienes como ellos, experimentan la necesidad de medir y crear herramientas para dar cuenta de esas medidas. Mediante el principio de actividad se involucra a los alumnos a "crear" sus propios conceptos matemáticos a través de la matematización y bajo la idea de que las matemáticas son una actividad de todos y no de unos cuantos (Freudenthal, 1973). Con el principio de niveles, los alumnos estarán inmersos en una actividad progresiva (Treffers, 1987), es decir los conocimientos que desarrollan les sirven de base para crear otros más. A través del principio de reinvención guiada el docente ayudará a los alumnos a "reinventar" el concepto de fracción.

Las normas matemáticas que se instauran al inicio del experimento de enseñanza permiten a los alumnos construir y reconstruir sus ideas acerca de las fracciones, estas normas suponen "un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar" (Freudenthal, 1991, p.55). Además, gracias al principio de interconexión, sus conocimientos también tocan otros conceptos matemáticos que les permiten ampliar su experiencia y conocer maneras de resolver las problemáticas a las que se enfrenta, "esto implica que los ejes de contenidos de aprendizaje no pueden ser tratados como entidades separadas" (Santamaría, 2006, p. 22).

La TEDE en cuestión se desarrolló en una escuela en la Ciudad de México, específicamente con un grupo de 31 alumnos que cursaban el quinto grado de educación primaria de entre 11 y 12 años de edad (16 mujeres y 15 hombres). El recorrido de la TEDE puso a los alumnos en interacción con las normas matemáticas que les permitieron alcanzar los objetivos de cada una de las seis prácticas matemáticas que conforman la TEDE.

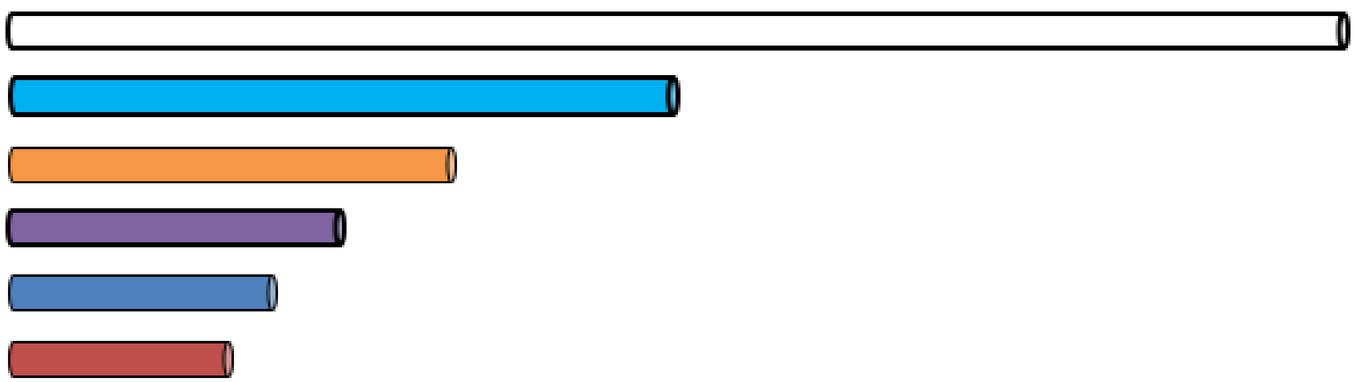
De la metodología. Los experimentos de diseño

En tanto metodología, los experimentos de diseño se utilizan en educación matemática pero no son exclusivos de ésta, su objetivo es desarrollar recursos educativos de naturaleza práctica y teórica que ayuden a mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje de uno o algunos conceptos matemáticos (Cobb, 2007). Esta metodología busca dejar de lado las aulas prototípicas para adentrarse en la realidad áulica, pues se asume que los contextos socioculturales juegan un rol imprescindible en los procesos de enseñanza de las matemáticas. Para ello echa mano de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en la que se incluyen formulaciones y conjeturas sobre los procesos de aprendizaje y los medios necesarios para apoyarlos (aspectos de la práctica en los que maestros y estudiantes participan).

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se integra con actividades de intrucción para representar ideas matemáticas, las conversaciones colectivas y la organización de las actividades del aula (Cobb, 2003). Es importante aclarar que este trabajo de investigación gira en torno a una TEDE diseñada especialmente para hacer que en el proceso de enseñanza se generen conjeturas que sobre el aprendizaje de los alumnos se plantearon.

El recorrido o TEDE comienza con una narrativa acerca de un pueblo imaginario llamado los Acajay, en el contexto de esta narrativa los alumno se involucran con el uso de medidas de longitud no convencionales (mano, cuarta, dedos, etc.) para reconocer la importancia de contar con una unidad de referencia que en la narrativa es una vara de 24 cm llamada Tije que ayudará a los alumnos a medir longitudes de forma convencional. Sin embargo, cuando la unidad no es suficiente para "cubrir" completamente una longitud se presenta una nueva problemática cuya solución requiere la creación de subunidades que se puedan utilizar para cubrir la longitud completa de un objeto, en la narrativa estas subunidades son llamadas "pequeños" y tienen una característica específica: al ser iterado dos veces el "pequeño" de dos cubre al Tije, al ser iterado tres veces el "pequeño de tres" hace lo mismo y así sucesivamente (Figura 1).

Figura 1. La unidad y subunidad



Nota. La unidad de medida cuya longitud es 1, y las *subunidades 2,3,4,5* y *6*

Con el Tije y sus subunidades se trabaja la relación recíproca de tamaño relativo (fracciones unitarias) y serán concebidas como una separada de la otra, es decir la subunidad como independiente del Tije (unidad), lo cual permitirá reconocer cuando una fracción unitaria es menor, mayor o igual a otra y posteriormente, razonar cuando la fracción es menor, igual o mayor que la unidad de referencia. Esta última parte de la TEDE es la que se analiza y presenta en esta ponencia, en ella se busca que los alumnos desarrollen las herramientas necesarias para comprender las fracciones impropias en el contexto de medida reconociendo que la subunidad no está contenida en la unidad de referencia sino que es independiente.

Resultados

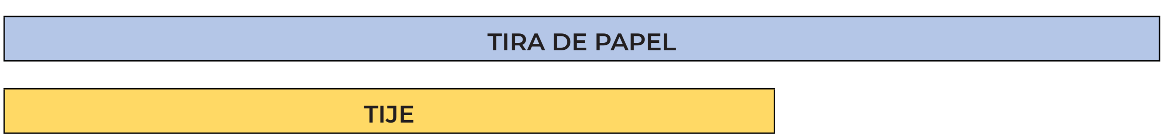
La reinvención de las fracciones unitarias es de suma importancia en nuestro trabajo, ya que dicha reinvención permite a los alumnos interpretarlas como una subunidad independiente de la unidad de referencia a través de la creación de los "pequeños". Como resultado de la iteración, los "pequeños" ayudan a los alumnos a comprender su tamaño relativo y la idea de que, entre más iteraciones se requieren para completar el entero (inverso multiplicativo) este es más pequeño.

El objetivo es que el alumno interprete la fracción como una medida de longitud que surge al iterar una subunidad, iteraciones que puede resultar menor a la unidad (), igual a la unidad () o mayor a la unidad (), y así poder alcanzar la norma matemática de “reinvención de la fracción”. Para el análisi, retomamos las ideas de Thompson y Saldanha (2003) quienes señalan que que los alumnos deben interpretar la fracción en términos multiplicativos y no partitivos (parte de un todo), es decir que el tamaño de una medida se puede definir a través de la iteración de una subunidad, por ejemplo que se interprete como seis veces . Para alcanzar este objetivo, el docente inmerso en la historia de los Acajay, plantea a los alumnos una situación que los inserta en el principio de realidad, en esta deben desarrollar estrategias para determinar la medida de tiras de diversos tamaños:

> **M:** Pues de este tamaño se las colocaban, tal vez porque se colocaban muchas, pero cuando las hacían así todas eran del mismo tamaño, la pregunta es ¿cuánto medirá?, vamos a usar nuestra vara y nuestros “pequeños”, empezamos hasta que a todos nos quede claro, con la vara, con nuestros “pequeños” vamos a medir la tira y a registrar la medida en nuestra hoja, donde está el inciso A, , vamos a apuntar cuánto midió nuestra tira.

En el fragmento anterior se puede apreciar que el docente presenta las tiras que los alumnos han de medir utilizando los “pequeños” para dar cuenta de su longitud, en este momento de la TEDE los alumnos tienen conocimientos sobre el valor recíproco del tamaño relativo, lo cual les permite comprender que, entre más pequeña es la subunidad, más subunidades del mismo tamaño requerirán para poder cubrir la totalidad de las tiras (Figura 2).

Figura 2. *Tiras de papel*



Nota. La tira de papel se ha de medir en relación con el tamaño del Tije (unidad).

Al interactuar con este tipo de situaciones se espera que los alumnos perciban a las fracciones desde la perspectiva multiplicativa a través de la iteración y a la par, que les sirva para identificarlas como algo que puede ser mayor a la unidad de referencia (Thompson y Saldanha, 2003), es decir que su tamaño no está restringido por la unidad, como sucede en el caso del trabajo con el significado parte todo.

Para la reinvención de la fracción impropia, el docente establece interacciones para que sean los alumnos quienes encuentren el sentido de éstas, para que puedan argumentar su tamaño y justifiquen por qué puede llegar a ser más grande que la unidad. En este sentido Steffe (2002) menciona que es importante que los nuevos esquemas que los alumnos adquieren en torno de este concepto no reemplacen a los anteriores, sino que puedan interpretar cómo es que los esquemas de reemplazo ayudan a resolver de mejor manera algunos problemas, tal es el caso de la situación que se presenta para medir los listones de los Acajay.

En esta primera interacción se ha logrado que los estudiantes participen en una actividad de medición que requiere iterar la subunidad un número mayor de veces, a través de sus reflexiones y de las conversaciones colectivas, los alumnos desarrollan nociones sobre la fracción impropia que les permiten ver que las subunidades pueden ser iteradas tantas veces sea necesario. Esta práctica matemática llega a su punto más alto cuando los alumnos se ven en la necesidad de elaborar tiras de papel que den cuenta de un tamaño específico, menor, igual o mayor que la unidad de referencia. La idea es que con esta actividad desarrollen argumentos que le permitan reflexionar por qué el número de iteraciones determina lo que matemáticamente se conoce como tamaño relativo, es decir el propósito es que los alumnos estructuren discursos conceptuales que les permitan explicar y validar cómo se puede determinar la medida de unas fracciones en comparación con otras.

> **M:** Pero no sólo vamos a hacer eso, es muy importante que antes que empecemos la actividad (busca algo) estemos todos listos, cuando ya haga mi tira de esta medida (señala el pizarrón) vamos a hacer tiras de medidas, le pongo cuánto midió y mi nombre y lo meto en este sobrecito (se los muestra) cada quien va a tener un sobrecito ¿sí? Entonces, Fabiola (le entrega sobres para que reparta) y Jacinto (le entrega sobres para que reparta).

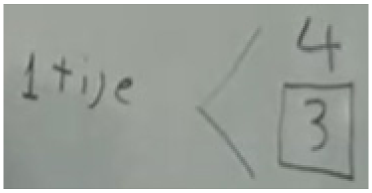
<u>Tiras a realizar (anotadas en pizarrón)</u>

1 Tije	4/3	5/6	2/2	6/5

Como se muestra en el fragmento anterior, la actividad busca que los alumnos interactúen con diferentes medidas y que comparen su tamaño para que reconozcan cuándo la tira es menor, igual o mayor a la unidad, en ese sentido Freudenthal (1983) señala que el juego de las comparaciones de fracciones en la medición lineal permite interpretarlas como un valor relativo que es resultado de la iteración. En el siguiente fragmento podemos observar algunas reflexiones que han desarrollado los alumnos para definir cuál tira es mayor y cómo dar cuenta de ello:

> **Sofia:** (Pasa al frente)

M: Vamos a usar el pac-man...la boca del pac-man. Sofia: (Escribe en el pizarrón)



M: ¿Quién está de acuerdo con Sofia?

Aos: (Varios levantan la mano)

M: ¿Quién no está de acuerdo con Sofia?

Aos: (Algunos levantan la mano)

M: Varios no están de acuerdo, ¿ya ven?... Vamos a escuchar el razonamiento de Sofia

Sofia: El Tije es más pequeño, porque éste (señala en el pizarrón) ocupa más espacio, si aquí diría tres (escribe "3") sería igual que el Tije, aquí es más grande porque se le aumenta uno (escribe en el pizarrón "1" a un lado de).

El argumento de Sofia deja ver que ha comprendido la relación recíproca de tamaño relativo y que por lo tanto, cuando el tamaño del "pequeño" (en este caso de tres) es igual al número de iteraciones, nos dará una medida igual a la de la unidad, el Tije. Como se puede apreciar, esto le ayuda a Sofía a argumentar sin dificultad que tiene una iteración más que el Tije y que por ello esa fracción es mayor que la unidad, es decir que ha superado a la unidad de referencia, por esa razón Sofía ella gráfica que un Tije es menor que .

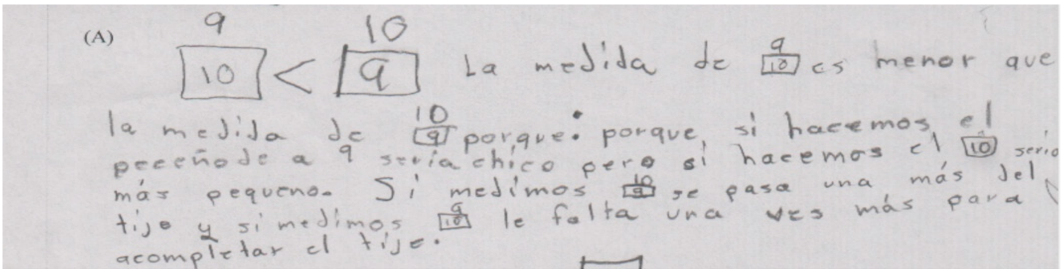
Este tipo de interacción colectiva permite a los alumnos exponer y escuchar las aportaciones que otros realizan y los ayuda a consolidar sus reflexiones en torno a los objetivos planteados, para ello es indispensable la participación del docente, que se se reconoce como un sujeto que orienta la reflexión sobre la experiencia y sobre la relación de la actividad con el contenido (Tzur, 2002).

Jacinto: Éste es más pequeño (señala en el pizarrón "1 Tije") que éste (señala en el pizarrón 4/3), porque si dijera tres veces el "pequeño" de tres, sería igual, del mismo tamaño que el Tije, pero no, se le aumenta otro...son cuatro.

La respuesta de Jacinto gira en torno a la misma reflexión de Sofía y es muestra que la se han apropiado de la noción de tamaño relativo ya que reconocen el inverso multiplicativo, es decir que A es $1/n$ de B y por lo tanto, que B es n veces A. Esto les permite reconocer a la fracción desde la propiedad multiplicativa y no sumativa como en el caso del parte-todo.

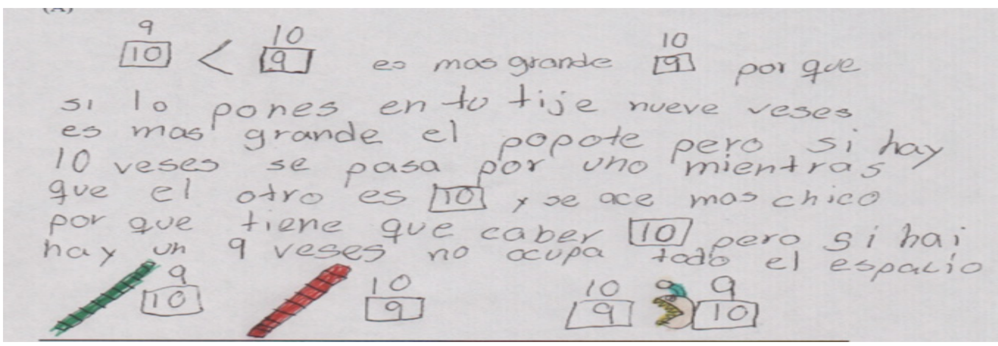
Las comparaciones del tamaño relativo que hacen los alumnos nos permiten apreciar que han comprendido las fracciones como algo que da cuenta de un tamaño (desde la perspectiva de magnitud continua) y que al no estar contenido en la unidad, pueden ser iteradas sin restricciones, este aprendizaje les permite construir argumentos para comprender cuándo una fracción es impropia y los argumentos de los alumnos se consolidan en lo escrito, en las siguiente imágenes podemos apreciar argumentos y justificaciones que hacen acerca de por qué 9/10 es menor que 10/9, es decir que 9/10 < 10/9.

Figura 3. Ejercicios comparación de fracciones



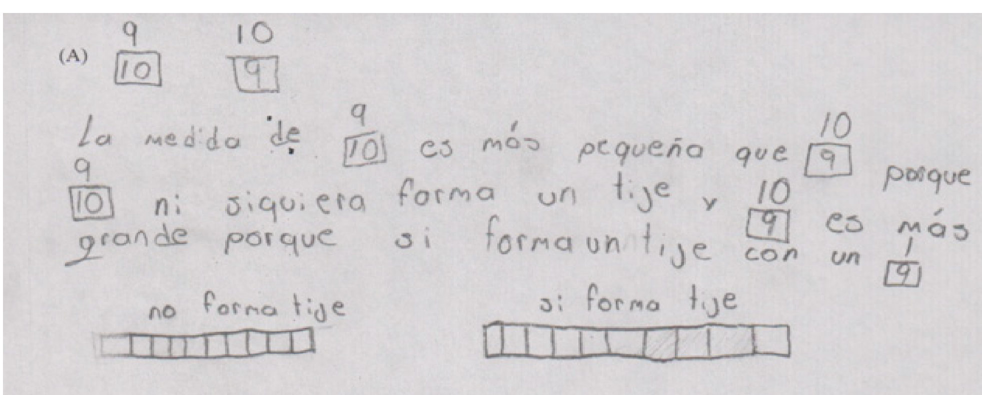
Nota. Trabajos tomados de las actividades de los alumnos.

Figura 4. Ejercicios comparación de fracciones



Nota. Trabajos tomados de las actividades de los alumnos

Figura 5. Ejercicios comparación de fracciones



Nota. Trabajos tomados de las actividades de los alumnos.

Los tres ejemplos que se muestran (Figuras 3, 4 y 5) dan cuenta de los argumentos de los alumnos en torno a tres elementos clave que se trabajaron durante el desarrollo de las TEDE. El primero es que comprenden el valor de la fracción unitaria (Figura 3), en ella el alumno señala que el "pequeño" de 9 (1/9) es chico, pero el "pequeño" de 10 (1/10) es aún más chico, se observa entonces que la justificación surge porque reconoce al inverso multiplicativo y la relación entre el número de iteraciones ya la longitud, esto es, que entre más iteraciones se requieran para ser igual que la unidad, más pequeña será la subunidad (Thompson y Saldanha, 2003).

En las figuras 4 y 5 se aprecia que los alumnos toman como referencia la relación recíproca de tamaño relativo y su relación con la unidad de referencia, es decir, comprenden que si A es 5 veces B, entonces B es de A (Thompson y Saldanha, 2003), por ello sus argumentos señalan que con 9/10 no se alcanza a formar el Tije, mientras que 10/9 es un "pequeño" más que la unidad. En este sentido podemos observar que pueden ver las fracciones como algo que no está contenido en la unidad de referencia y que ello permite iterarlas tantas veces sea necesario para dar cuenta de un tamaño, como es el caso de esta comparación.

En el campo de las fracciones, la relación multiplicativa es una noción que Tzur (2002) y Thompson y Saldanha (2003) consideran indispensable para que el alumno comprenda el tamaño relativo de la fracción, es decir, que el alumno debe reconocer la iteración como un medio que permite determinar una medida, esta acción les permite reconocer la fracción como independiente de la unidad de referencia y generar esquemas para comprender las fracciones impropias.

Conclusiones

Los esquemas fraccionarios que los alumnos construyeron con el trabajo con la TEDE, muestran que sus interpretaciones sobre las fracciones impropias se han modificado, ahora conciben la fracción como un número que es capaz de cuantificar y que además, las subunidades son independientes de la unidad de referencia, lo que permite que se puedan iterar tantas veces según sean menores, iguales o mayores a la longitud de la unidad.

Los argumentos de los alumnos tienen sentido y son una muestra de que comprenden el tamaño de una fracción unitaria, la relación recíproca de tamaño relativo y el mismo tamaño relativo de una fracción, todos estos aspectos les permiten reconocer cuando una fracción es impropia y comprenden también por qué lo es.

Por último, las ideas de la EMR y los experimentos de diseño que se utilizan para desarrollar nuestro experimento de enseñanza nos permiten plantear una agenda que puede ser utilizada por los docentes como una propuesta para introducir a los alumnos en las fracciones como números que son capaces de cuantificar.

Referencias

Cobb, P., Visnovska, J., y Zhao, Q. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Education et Didactique*, 55-73.

Cortina, J. L., Zuñiga, C., y Jana, V. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones . *Educación Matemática*, 25(2), 7-29.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* . Dordrecht: Reidel Publis.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. *Mathematics Education Library. D. Kluwer Academic Publisher.*

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht, The.

Llinares Ciscar, S. y. (1997). *La relación parte-todo. Vallehermoso.* Editorial Síntesis S.A.

Santamaría, F. I. (2006). La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda (Tesis de Maestría). *Universidad Nacional del Comahue*.

Steffe, L. P. (2002). Una nueva hipótesis sobre los niños en conocimiento fraccional. *Departamento de Educación Matemática* .

Thompson, P. W. (2003). "Fractions and multiplicative reasoning". En W. G. J. Kilpatrick, *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (págs. 95-113). Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

Treffers, A. (1987). Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. *The Wiskobas Project, Dordrecht: Kluwer.*

Tzur, R. (1999). An Integrate Study of Children´s Construction of Improper Fractions and the Teacher´s Role in Promoting the Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 390-416.