Relación de Orden Inverso y Comparación de Fracciones Unitarias. Aprendizaje democrático

Christine Janet Luna de la Rosa
Universidad Pedagógica Nacional 321
libelulas21@hotmail.com
Anel Ivette Delgado Valdez
Universidad Pedagógica Nacional 321
ivette_guera8@hotmail.com
Luis Manuel Aguayo Rendón
Universidad Pedagógica Nacional 321
l_aguo@yahoo.com.mx

Área temática: Educación en campos disciplinares
Línea temática: Educación Matemática
Tipo de ponencia: Reporte parciales o final de investigación

Resumen

En esta ponencia se exponen los resultados de la implementación de una situación de enseñanza de la fracción como comparador que forma parte de un "Experimento de Diseño" fundamentado en la Educación Matemática Realista (EMR), dicho experimento tiene como referente la iteración de la longitud de una fracción unitaria centrada en la práctica matemática de "relación de orden inverso y comparación de fracciones unitarias". La conjetura principal es que con la medición de magnitudes físicas y conversaciones colectivas, los alumnos comprenderán por qué y cómo el tamaño de las entidades cuantificadas por fracciones unitarias disminuye a medida que el número en el denominador crece. El propósito es examinar la pertinencia de la práctica matemática propuesta, esto es que cumpla ciertas condiciones, a) una condición iterativa, la iteración se puede acumular sin restricciones; b) las subunidades están fuera de la unidad de referencia c) tamaño relativo, hay una relación entre el tamaño de la subunidad y las veces que cabe en la unidad de medida (Tije).

Palabras clave: Iteración, fracciones unitarias, tamaño relativo, comparación, orden inverso

Aprendizaje Enseñanza de las Fracciones. Una Problemática Vigente

En la actualidad la enseñanza de las fracciones sigue siendo un tema de investigación, dados los raquíticos resultados escolares que se han tenido a lo largo de 40 años, por ello se le reconoce como un serio desafío para el sistema educativo mexicano así como para el de muchos otros países, la importancia de este hecho se puede comprender desde dos sentidos; en la relevancia de su conocimiento como predictor de otros conceptos como los del álgebra (Siegler, 2012) y en los resultado poco favorables que se han evidenciado en las pruebas estandarizadas (PISA, ENLACE, EXCALE, PLANEA).

Aunque el tema ha sido extensamente investigado, continúa una insatisfacción respecto a los niveles de comprensión de las fracciones, cuya enseñanza se ha abordado principalmente desde el modelo de Kieren. En el análisis de la literatura internacional (Fandiño, 2011), se ha colocado en el centro el modelo de Thomas Kieren (1980) quien plantea a la fracción como número racional, esto significa que, después de dominar todos los significados de las fracciones, el alumno debe integrarlos para construir el concepto de número racional. En el modelo de Kieren el significado 'parte todo' es el eje vertebral de los demás significados (cociente, razón, medida, y operador) y generalmente se enseña en contextos continuos como partir un chocolate en partes iguales o en contextos discretos como determinar la fracción que representan 25 de 100 alumnos, este modelo aún sigue vigente en los planes de estudio a nivel global. A partir de las ideas anteriores de estos podemos concluir que el principal problema radica en querer enseñar (y aprender) las fracciones como número racional.

Freudenthal (1983) ya expresaba la preocupación de utilizar este modelo sin tener evidencias de su impacto positivo para la comprensión de fracciones como cantidades que pueden dar cuenta de algo, es decir como números genuinos, en esas preocupaciones se resaltan dos problemáticas. Una era que desde esa perspectiva se ve a la fracción como la suma de múltiples significados y partir del significado parte- todo se representa a la unidad como un objeto susceptible de ser quebrado, partido, coloreado en partes iguales, de esta manera se concibe a la fracción como "tantos de tantos", lo que normalmente da significado al denominador como número de partes en que se corta el entero y al numerador como el número de partes que se toman del entero, así la fracción es algo contenido en un entero (Cortina et al., 2013). Una segunda problemática de la centralidad del significado parte todo es que, vista de esta manera la fracción tiene una limitante relacionada con la cantidad de la que puede dar cuenta, sólo puede expresar fracciones propias (menores que la unidad) y además ofrece un concepto de equivalencia restringido. Es por estas dificultades que Freudenthal (1983) vislumbraba la equipartición como un escenario restringido y poco alentador para la comprensión de la fracción. Frente a este problema se hace necesario encontrar maneras de apoyar el aprendizaje de las fracciones que no fomenten el desarrollo de la equipartición, como parte de un entero.

Tomando en consideración las razones anteriores, la propuesta para la enseñanza de las fracciones busca apoyar a los alumnos de la escuela primaria para que razonen de manera consistente sobre la relación de orden inverso de las fracciones unitarias y sobre el tamaño relativo de fracciones propias e impropias respecto a la unidad (Thompson y Saldanha, 2003). Está basada en las ideas de Freudenthal (1983) sobre la Educación Matemática Realista (EMR) y la concepción de una Teoría de la Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) dentro de un experimento de diseño, perspectiva en la que se reconoce la necesidad de adoptar a la fracción como un número no como una estructura (número racional).

Nociones fundamentales de la EMR

La EMR es una corriente didáctica muy conocida en el mundo cuyo creador fue Hans Freudenthal. Esta teoría surgió en Holanda en el contexto de la reacción al movimiento de la matemática moderna y es una teoría para guiar el diseño de intervenciones educativas que permitan encontrar una mejor forma de adentrar a los alumnos en el mundo de las matemáticas, se trata de que los niños "hagan matemáticas" (matematicen) y como consecuencia reinventen ideas, principios y conceptos, de esta manera las matemáticas emergen de un quehacer (del proceso de matematizar), de una matematización cada vez más compleja.

Desde la EMR un punto clave para el desarrollo de un conocimiento matemático tiene que ver con considerar no sólo la matematización o la reinvención guiada como elementos centrales, sino también debe tomarse en cuenta la fenomenología didáctica que trata de encontrar situaciones de la vida real que puedan y pidan ser matematizadas. En ese sentido, hablar de una "matemática realista", significa pensar en una matemática conectada con la realidad, que está cercana a los alumnos y es relevante para la sociedad en tanto que se transforma en un valor humano. La diferencia fundamental entre la educación tradicional y la EMR es que esta última concibe a la matemática como una "actividad humana," que se realiza entre grupos heterogéneos.

El quehacer matemático, la matematización, es un proceso que se realiza en primera instancia sobre la realidad y posteriormente sobre la misma matemática, llevando a los alumnos de un conocimiento informal y pre-formal a un conocimiento formal; la matematización progresiva significa reconocer que los fenómenos organizados que se han convertido en conocimientos matemáticos, pasan a formar parte a un saber contextual que dará pie a nuevos y más complejos objetos matemáticos en un proceso cíclico que permite ir mejorando sus saberes matemáticos.

Experimento de Diseño. Una alternativa metodológica

A partir de la década de los setenta comenzó a desarrollarse un movimiento en psicología y educación denominado enfoque cognoscitivo (Brown, 1992) que trajo consigo la necesidad de buscar alternativas a la metodología experimental, rutas metodológicas [evolutivas] que pudiesen capturar la naturaleza del aprendizaje y la enseñanza de forma libre y real; en este contexto, la historia de la investigación tuvo un cambio, se transitó de la realización de experimentos en condiciones de laboratorio con procedimientos cuidadosamente definidos y controlados, a la realización de experimentos de diseño, ahora el foco del diseño era "el diseño de algo" que intentaría experimentar en entornos de la vida real con el objetivo de perfeccionar el diseño que se prueba en la práctica.

Desde esta aproximación tanto investigadores como docentes coincidimos en la prioridad de conocer lo que sucede en el aula cuando los alumnos adquieren conocimientos a partir de metodologías sensibles a la complejidad de los contextos de enseñanza/aprendizaje, lo que conlleva aumentar la relevancia de la investigación para la práctica. Es de este modo, para la contribución a la resolución de un problema y generar nuevo conocimiento, Collins (2010) pone en evidencia la relevancia de la metodología "experimento de diseño".

Una propuesta para la enseñanza de las fracciones

La propuesta de enseñanza, es decir la Teoría de la Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) se basa en la caracterización de la fracción como número de Freudenthal (1983), con ella se busca favorecer el aprendizaje de las fracciones como números que cuantifican magnitudes, es decir como un número que da cuenta del tamaño de cierto atributo, como algo que no está contenido en la unidad de referencia (Cortina et al., 2013).

Para lograrlo se utilizó la longitud como magnitud de referencia y se diseñó una serie de actividades, que denominamos agenda, en la cual los niños experimentan la "reinvención" de la medición lineal. Las actividades se colocan en el contexto de una narrativa que cuenta las formas en las que un grupo legendario de antiguos mayas (Acajays) medía. En la TEDE primero se explora la medición y se plantea la necesidad de buscar una medida estandarizada para dar precisión a la medición. Para ello se requieren ciertas condiciones, a saber:

- La unidad de referencia será la vara de los Acajay (Tije) de 24 centímetros aproximadamente.
- Los niños crean subunidades en forma de varillas, de plástico o papel (son barras que físicamente son independientes de la unidad, llamados "pequeños", en lenguaje Acajay "caimos")
- La imaginación, que determina lo real en su mente, les permite en un momento dado prescindir del material físico.
- Las varillas sirven de base fenomenológica para ayudar a los alumnos a razonar sobre el tamaño relativo de las fracciones respecto a la unidad de referencia y entre ellas; para reconocer cuál es mayor o menor que otra según el número de iteraciones necesarias para cubrir la unidad.

Este tipo de actividades son útiles para apoyar a los estudiantes a construir formas de razonar consistentes sobre la relación de orden inverso de las fracciones unitarias y sobre el tamaño relativo de fracciones propias e impropias respecto a la unidad (Cortina et al., 2013). La propuesta fue puesta a prueba con 31 estudiantes de quinto grado de educación primaria, en una escuela pública de la Ciudad de México, en turno matutino.

Relación de orden inverso y comparación de fracciones unitarias

La práctica matemática está asociada con las prácticas sociales, que ven al aprendizaje como cambios en la forma de participación de los alumnos en la cultura de aula. En ese sentido, el razonamiento colectivo de los alumnos pretende dar sentido a las fracciones unitarias como números que cuantifican relaciones recíprocas y multiplicativas mediante la iteración, particularmente con el objetivo de reconocer el tamaño relativo de una subunidad de medida, cuya longitud corresponde a una fracción unitaria; relación de orden inverso de las fracciones unitarias. Comprender esta relación implica entender por qué y cómo el tamaño de las entidades cuantificadas por fracciones unitarias disminuye a medida que el número en el denominador crece. (Thompson y Saldanha 2003).

Para esta práctica conjeturamos entonces que a partir de que los alumnos vivan el quehacer con las subunidades (pequeños), les será razonable establecer la relación de orden inverso, identificar que una fracción como 1/19 es mayor que una fracción como 1/20 , ya que en la vivencia de dicho quehacer se dan explicaciones por la misma comunidad áulica que se fundamentan cuantitativamente sobre por qué el razonamiento anterior es sensato, esto es que la fracción unitaria disminuye a medida que el numerador crece, ya que su tamaño relativo está determinado por el número de iteraciones necesarias para que la subunidad represente un tamaño igual al tamaño de la unidad de referencia, como se especifica en el denominador, en una relación multiplicativa, con el tamaño.

Tamaño *versus* Numerosidad

En la TEDE desde el inicio se propone apoyar a los estudiantes a imaginar las fracciones unitarias como números que permiten conocer el tamaño de un atributo específico (por ejemplo la longitud) de una cosa que está separada de una unidad de referencia.

Un objetivo base de nuestra práctica era que los alumnos reconocieran el tamaño relativo de una subunidad de medida cuya longitud corresponde a una fracción unitaria de la longitud de la unidad de referencia (Tije), conjeturando así que podrían determinar la desigualdad entre fracciones unitarias mediante la comparación, es decir, que los alumnos sean capaces de comparar el tamaño de una multiplicidad de unidades y puedan justificar sus comparaciones.

Teniendo como antecedente la actividad “expresar la medida de mi estatura” la clase reconoce la problemática de la exactitud ya que la mayoría de los alumnos (23 de 31) reconoce que la cuantificación de iteraciones no siempre da un número exacto, con ello se gesta la invención de nuevas unidades de medida que tienen como referente al Tije. Las nuevas unidades permiten solucionar situaciones en las que, por ejemplo, un objeto mide más de cinco Tijes pero menos de seis, lo que exigiría crear unidades de medida más cortas que el Tije (Cortina, 2020, p.15). Sobre este respecto, en la conversación colectiva aparece la reflexión acerca de que, un “cacho” puede tener varias connotaciones, lo que da pie a la creación de las subunidades (caimos).

El "pequeño" de a dos. Oticaiomo

Siguiendo la narrativa de los Acajay se pide a los alumnos que elaboren un "pequeño" (caimo) de dos que satisfaga la condición de que con dos iteraciones se cubra exactamente al Tije, otra condición es que debe estar separado de la unidad de referencia. Para cumplir estas condiciones (de los Acajay) se les proporcionaron popotes de color azul que funcionaron como subunidades, con ellos los alumnos construyeron los "pequeños" y el docente los guía a través del análisis de si el popote debe ser más o menos largo para cubrir el Tije con dos iteraciones.

> [1]M: (dirigiéndose a la alumna) ¿usaste la regla o cómo le hiciste?
>
> [2]Aa: no, pensé
>
> [3]M: ¿nada más la pensaste? A ver, pruébame (alumna realiza iteración y no sale exacto)
>
> [4]M: si uno me quedó un poquito más corto, lo pueden usar como referencia y hacer uno más largo
>
> [5]M: ¿ya te quedó? Sin regla ni nada
>
> [6]Ao: sí (alumno mide iterando, queda exacto, chocan la mano en señal de éxito)
>
> [7]Ao: sí (itera doblando)
>
> [8]M: acuérdate que no doblamos, no damos vueltas, de acuerdo (los alumnos comprueban a través de la iteración, cortan o realizan uno nuevo de ser necesario)

A partir de la consigna (construir el oticaimo), la clase discute las diferentes formas de construirlo y resalta las estrategias que ayudan a considerar la importancia de la iteración [1-8], la de la imaginación del segmento, la de la longitud comparada con la vara que es la referencia. Por otro lado, la costumbre de usar medidas convencionales (regla métrica) enriquece el debate y permite resaltar la importancia de la exactitud.

En un primer momento se recuerda a los alumnos que por ser Acajays no disponen de medidas convencionales, esta consideración estimula su capacidad de invención y provoca que surjan estrategias basadas en la iteración. Al cuestionar qué tan chico o largo debe ser el popote, los alumnos recurren a la imaginación, lo representan en la mente y hacen la comparación, luego para calcular su exactitud utilizan la estimación y la iteración del pequeño que han cortado. Con esto puede verse que se reúnen varias habilidades matemáticas en un mismo quehacer, la iteración, la imaginación y la estimación, habilidades que les permiten revisar la confección del pequeño de dos (oti) y avanzar hacia la reflexión sobre la relación entre iteración y exactitud, es decir, que al iterar pueden encontrar con exactitud las dos subunidades que cubren la vara de referencia. Al reconocer "que el oti es una unidad fuera de la unidad de referencia que cabe dos veces en ella" comprenden que el dos representa dos iteraciones, noción que se distancia de la idea acerca de que la unidad es fracturada en dos partes iguales.

A partir de esta reinvención la clase puede cuantificar sin restricciones el número de iteraciones que se requieran y al hacer la comparación, reconocen que un pequeño de dos es menor que un Tije y que se necesitan dos otis para igualar a la vara.

En la última reflexión sobre el oti se evidencian las dos condiciones inherentes a él, es una medida independiente de la unidad de referencia y cumple una condición iterativa, debe iterarse dos veces para cubrir la unidad de referencia. El reconocimiento de estas dos condiciones facilitará la comprensión de la noción de fracción unitaria como relación de tamaño relativo entre dos cantidades independientes que son accesibles para los alumnos (Cortina, 2020), por ejemplo un pequeño de a dos (½) es menos que un Tije. Lo mismo pasa con el "pequeño" de tres (1/3) es decir, son necesarias tres iteraciones del "pequeño" para igualar la longitud de la unidad. De esta manera se puede reconocer que 1/2 es mayor que 1/3 pues al ser fracciones unitarias se reconoce que un "pequeño" de dos solo necesita dos iteraciones para igualar la longitud de la unidad, mientras que el pequeño de tres requiere de tres iteraciones. Esta construcción fue posible gracias a las actividades de comparación, a la construcción física del oti y a las conversaciones colectivas que actúan como un medio de apoyo para la clase en su conjunto.

> [1] M: (escribe en pizarrón uaticaimo) qué creen que quiera decir
>
> [2] Aos: pequeño de cuatro
>
> [3] M: ¿sería más grande o más chico que el pequeño de a tres?
>
> [4] Aos: más chico
>
> [5] M: Entonces, ¿cómo es? es un pequeño de…
>
> [6] Aos: de a cuatro
>
> [7] M: de cuatro y va tener que caber aquí ¿cuántas veces?
>
> [8] Aos: cuatro veces
>
> [9] M: Fíjate Cecilia Este cabe tres veces (muestra el popote), el que quepa cuatro, ¿va ser más chico o más grande? (le pregunta a una alumna) ¿tú qué crees?
>
> [10] Aa: más chico
>
> [11] M: ¿y, el pequeño de a cuatro, cuántas veces cabría?
>
> [12] Sofía: cuatro
>
> [13] M: ¿sería más grande que el de tres?
>
> [14] Sofía: más… chico

[15] M: ¿por qué?

[16] Sofía: porque tiene que caber cuatro veces en el tije

[17] M: ¿por qué tiene que caber cuatro veces? Y ¿el de a cinco, sería más grande o más chico?

[18] Sofía: más chico.

En la discusión se puede apreciar un argumento razonable acerca de por qué cuando el número aumenta la longitud disminuye [13- 18], es un razonamiento sobre el orden inverso de acuerdo a su tamaño relativo. No obstante, el escepticismo es una parte fundamental en el trabajo con la propuesta porque se trata de que aparezcan otros argumentos para que dicho razonamiento sea aceptado o rechazado por la clase. Recordemos que para el análisis se tomaron en cuenta las producciones libres de los alumnos, lo que nos ayudó a identificar diferentes niveles de matematización, lo que marcará el camino hacia un nivel mayor de abreviación y esquematización a través de un proceso denominado matematización progresiva (Freudenthal, 1991).

Imaginar el "pequeño" de a 20

Al continuar con la actividad, el diseño de subunidades va más allá de la simple práctica, se convierte en una "actividad reflexiva" (Freudenthal, 1991), no sólo porque es tangible sino también porque se refiere a la manera como los alumnos la reinterpretan a partir de sus pensamientos, es decir cómo la imaginan, si es realizable o imaginable;

[1]M: Ana. En la hoja quiero que dibujen, primero quiero que lo imaginemos, uno que no hemos hecho, quiero que lo imaginemos, no vamos a decir nada, solo que lo imaginemos el pequeño de a veinte

[2]M: Entonces me imagino de qué tamaño sería un pequeño de a veinte, a lo mejor ni me cabe en la hoja

[3]Aos: yo creo que chiquito

[4]M: ¿sería grande, grande o pequeño, pequeño?

[5]Aos: pequeño

[6]M: Ah! Entonces si cabe, ¿no?, primero lo dibujo de qué tamaño creo que es y luego escribo, creo que sería de este tamaño porque... Por ejemplo, creo que sería muy grande, porque 20 es un número muy grande. El pequeño de a 20 va a ser gigante.

Parece que Lupita no está de acuerdo conmigo, pero entonces lo que ustedes crean.

[7]M: Obvio si no dibujaron algo muy grande la tienen mal, porque veinte es un numerote

[8] (no, no, es chiquito, se comenta en el grupo)

[9] M: el veinte es un numerote, entonces tendría que dibujar algo muy grande, no?

[10] M: Lucas dibujaste algo grande o pequeño?

[11] Lucas: Pequeño.

Las respuestas sugieren que el grupo ha avanzado en la matematización progresiva sobre el tamaño relativo [2-5] [9-11], pero se busca no sólo el “aprendizaje de contenidos matemáticos” sino también que los niños vivencien la matemática, que se involucren en la argumentación, en el análisis de la respuesta, incluso que cuestionen porque el “se vale equivocarse” puede aprovecharse [6-8] para propiciar ese quehacer y en colectivo tratar de comprender el razonamiento de otros.

[12] Leticia: entre más grande el número menos grande el popote

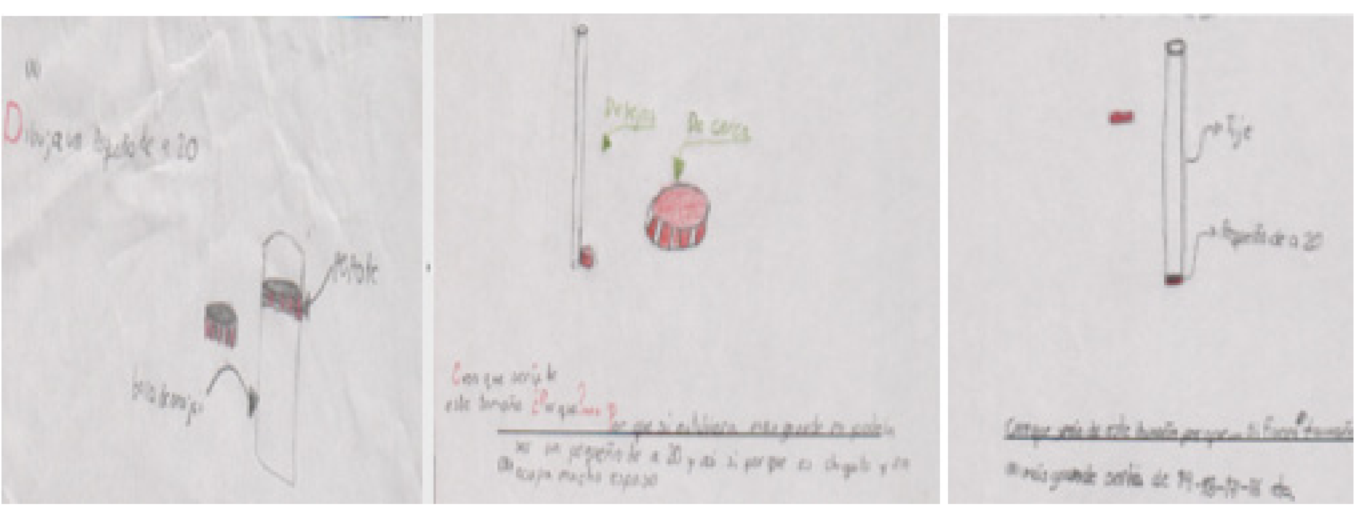
[13] Sofía: sería de este tamaño, porque si fuera tamaño más grande sería 19, 18, 17, etc.

[14] Ana Paula: yo creo que sería de este tamaño porque si lo hago muy grande no me cabría 20 veces, pero de este tamaño si cabe las 20

[15] Luis Humberto: entre más grande sea el número más chico tiene que ser el popote

[16] Fabiola: porque si estuviera más grande no podría ser pequeño de a 20 y así sí porque está chiquito.

Figura 1. Producciones de los alumnos



Nota. Los alumnos representan el tamaño del “pequeño” de a veinte en relación a la unidad de referencia (Tije). Las veces que cabe el pequeño de a veinte en la vara.

En sintonía con lo dicho en las discusiones colectivas, los alumnos toman como referentes los dibujos que realizaron para obtener recursos que les permitan reorganizar su pensamiento. En la figura del centro se observa la representación del "pequeño" de veinte que hace Luis Humberto, en ella expresa ya dos unidades, una de referencia que representa al "veinticaimo" nombrado así por toda la clase. En la segunda imagen Sofía representa la longitud e incluye una explicación coherente en función de dicha cualidad "tienen que ser pequeño para poder hacer y cuantificar las 20 iteraciones". Por su parte Fabiola representa al "pequeño" de veinte anticipando la cuantificación y comparación, menciona el tamaño relativo al reconocer que un veinticaimo (fracción unitaria 1/20) es más chico que uno de 19, 18, 17, 16, lo que significa que reflexiona sobre la relación de orden inverso y comprende que a mayor tamaño menos repeticiones por abarcar mayor espacio. Entre más veces se itera una subunidad es más chica, y entre menos se itera, es más grande.

Conclusiones

El análisis que hasta aquí hemos hecho de la segunda práctica matemática, se ha centrado en la manera como los alumnos reconocen y solucionan el problema de medir una longitud en la que es insuficiente el Tije y como se ha podido observar, las actividades de la TEDE permitieron mediante la construcción de subunidades (pequeños caimos) que los estudiantes comprendieran la relación entre el tamaño de la subunidad y las veces que cabe en la unidad de medida (Tije). En este quehacer también se puede apreciar cómo la actividad conjeturada traspaso lo tangible, porque la mayoría de alumnos comprendieron que entre más veces se itera una subunidad es más chica, y entre menos se itera, es más grande, es decir, comprenden el orden inverso de las fracciones unitarias en el contexto de la medición.

El reconocimiento de la necesidad de subunidades que den cuenta de los "cachos" más pequeños que la unidad permitió reconocer el valor relativo de las fracciones unitarias (pequeños); mientras más veces se itera el pequeño (representado por el denominador) para ajustar la vara (Tije) menos grande es la fracción unitaria, o viceversa, entre menos iteraciones, la fracción unitaria es de mayor tamaño. El reconocimiento de estas dos condiciones (orden inverso de la fracción y su valor relativo) facilitará la comprensión de la noción de fracción unitaria.

Referencias

Brown, Ann. (1992). Design Experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. Journal of the Learning Sciences, 2(2), 141-178.

Collins, A. (2010) Design Experiments. Northwestern University, Evanston, IL, USA. Elsevier Ltd. All rights reserved.

Cortina, J. L., Zúñiga, C. y Visnovska, J.(2013*)* La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones.*Educación Matemática.25* (2),729.

Cortina, J.L. (2020). On the problem of characterizing fractions for instructional design purposes or Characterizing fractions for instructional design purposes.pp.1- 15.

Fandiño M. (2011). Las Fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá, Colombia: Cooperativa editorial magisterio.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. *Mathematics Education Library. D. Kluwer Academic Publisher.*

Freudenthal H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Kieren T. (1980). *The rational number constructs its elements and mechanisms*. University of Alberta.

Siegler, R. (2012). Early predictors of high school Mathematics Achievement. Association for psychological science. *sagepub.com/journalsPermissions.nav* DOI: 10.1177/095679761244010.

Thompson, P. W., y Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (Eds.), Research companion to the principles and standards for school mathematics (pp. 95-113). Reston, Virginia, EEUU: National Council of Teachers of Mathematics.