Relación entre niveles de razonamiento proporcional: un estudio en telesecundaria unitaria a través de micromundos

Carlos Alberto Lugo Lugo
Universidad Autónoma de Querétaro
clugo26@alumnos.uaq.mx
Erika García Torres
Universidad Autónoma de Querétaro
erika.garcia@uaq.edu.mx
Santiago Alonso Palmas Pérez
Universidad Autónoma Metropolitana
santiagopalmas@gmail.com

Área temática: Educación en campos disciplinares
Línea temática: Educación matemática
Tipo de ponencia: Reporte parcial de investigación

Resumen

El razonamiento proporcional es una de las ideas fundamentales de la matemática. Este surge inicialmente de manera cualitativa hasta transformarse en un razonamiento cuantitativo; pero durante su desarrollo, existen diferentes aproximaciones que irrumpen con su comprensión, como la relación aditiva o el empleo injustificado de la regla de tres. El objetivo del trabajo es explorar el razonamiento proporcional de alumnos de telesecundaria unitaria a través de la manipulación de micromundos, identificando niveles de razonamiento que permitan caracterizarlo en esta modalidad educativa. A partir de los niveles de razonamiento proporcional propuestos por Karplus et al. (1983), se han diseñado actividades compuestas por diferentes problemas en GeoGebra empleando sus herramientas y el lenguaje propio del *software* como medio de exploración; esto tiene como finalidad el identificar, a partir de las interacciones entre alumnos, con el micromundo y el investigador, el nivel en el que se encuentran y la implicación que tiene su construcción en colectivo. Se encontró que los niveles no son mutuamente excluyentes, por lo en este reporte se muestran las relaciones entre niveles y la función de dichas relaciones.

Palabras clave: Razonamiento proporcional, micromundos, telesecundaria unitaria.

Introducción

El razonamiento proporcional (en adelante RP) es una de las nociones matemáticas que se trabajan en diferentes niveles educativos y a través de una variedad de acercamientos. Es un tipo de pensamiento complejo que implica el reconocimiento de comparaciones como la covariación entre magnitudes y comparaciones múltiples; además, está relacionado con los métodos del pensamiento cualitativo y cuantitativo (Heller et al., 1989).

El RP no sólo está presente en las matemáticas, sino que es fundamental en la estructura descriptiva de la física y otras ciencias (Mochón, 2012). Piaget lo consideraba como un componente básico del razonamiento formal, necesario para adquirir conceptos como el de probabilidad y correlación (Godino y Batanero, 2003).

Dentro del sistema educativo de México, el RP está integrado en los planes y programas de la educación secundaria, si bien, no está presente como RP, en los aprendizajes esperados (SEP., 2017) se menciona lo siguiente para cada año escolar:

- Primer año: Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación). Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base.
- Segundo año: Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional. Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
- Tercer año: Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.

Por lo que, “es un conocimiento que subyace en múltiples nociones matemáticas: la multiplicación, el número relacional, la escala, el porcentaje, la probabilidad, la función lineal entre otras” (Block et al., 2014, p. 2). Debido a la presencia que tiene en el currículo y las nociones matemáticas involucradas en el RP, se considera que caracterizarlo favorece al entendimiento de las dificultades que pueden llegar a presentar los alumnos.

Este estudio toma como población a la telesecundaria unitaria ya que no cuenta con una propuesta curricular de acuerdo a sus necesidades (García et al., 2019) y a pesar de ello muestra aportes pedagógicos interesantes, como la construcción de aprendizajes en colectivo por la diversidad de edades, de pensamiento y razonamiento (Bustos, 2013). Las construcciones hechas por los alumnos involucran una discusión y toma de decisiones, lo cual favorece su comunicación matemática y la justificación de sus resultados.

A partir del uso de un micromundo de GeoGebra y una serie de actividades desarrolladas en él, se busca identificar la manera en la que los alumnos de telesecundaria unitaria se aproximan al RP, identificando el tipo de razonamiento a partir de una clasificación por niveles (Karplus, et al., 1983), teniendo como principal enfoque las interacciones entre alumnos multigrado, alumno-micromundo y micromundo-RP. Por tanto nuestro objetivo es explorar los niveles de razonamiento proporcional en alumnos de telesecundaria unitaria a través del uso de micromundos.

Desarrollo

Marco Teórico

Razonamiento proporcional

El RP es un razonamiento matemático (Verdú y Ciscar, 2012) que denota un sistema de dos variables entre las que existe una relación de función lineal y puede caracterizarse como una relación multiplicativa constante (Karplus, et al., 1983). Se refiere a detectar, analizar, explicar y proporcionar evidencia en apoyo de afirmaciones sobre relaciones proporcionales (Lamon, 2020), además, no sólo implica el entendimiento de la relación multiplicativa que existe entre dos cantidades, sino que también implica la habilidad de discriminar situaciones proporcionales de las que no lo son (Modestou y Gagatsis, 2010).

La noción de proporción comienza a construirse en los primeros años educativos de manera cualitativa y lógica, antes de que se estructure cuantitativamente (Butto et al., 2019), permitiendo que se comprendan situaciones proporcionales bajo términos del tipo “en ambos casos crecen” o “las dos disminuyen”.

Se ha identificado respecto al RP de alumnos de secundaria que acuden con mayor comodidad al análisis de tipo cualitativo que a los análisis de tipo cuantitativo, y cuando llegan a aproximarse de forma cuantitativa, se fundamenta principalmente en análisis de índole aditivo siendo esta una aproximación errónea (Sánchez, 2013).

Existen cuantiosos estudios enfocados en el RP, de los cuales se han identificado los trabajos realizados de Karplus et al. (1983) y Lesh et al. (1988) como pioneros. Para este estudio se retoma la categorización propuesta por Karplus et al. (1983), generada a partir de las respuestas y las estrategias de resolución al problema “Mr. Tall/Mr. Short” por parte de alumnos en edad escolar (12 a 15 años), estableciendo así cinco niveles como se describe en la tabla 1.

Tabla 1. Niveles de razonamiento proporcional

Niveles de razonamiento proporcional	
Nivel	**Descripción**
Incompleto	En el nivel incompleto se adivina la respuesta o emplean una operación cuantitativa inapropiada.
Cualitativo	Se comparan las cuatro cantidades dadas, usando los términos más, menos o términos equivalentes.
Aditivo	Estrategia incorrecta que hace uso de diferencias en parte o todo el razonamiento en vez de una relación multiplicativa.
Pre-proporcional	Uso de factores multiplicativos para relacionar cantidades.
Proporcional	Uso directo de razones y su equivalencia o no equivalencia.

Nota: propuesta tomada de Karplus et al. (1983)

Micromundos

Un micromundo se define como un ambiente computacional de incorporación de un conjunto coherente de conocimientos científicos y de relaciones diseñadas, de forma que, con un conjunto adecuado de tareas y con principios pedagógicos, estudiantes pueden participar en la exploración y construcción de actividades ricas en generación de significados (Healy y Kynigos, 2009).

De manera específica, un micromundo matemático es un lugar para familiarizarse con un conjunto de ideas, de situaciones problemáticas o de actividades, en donde el estudiante y el maestro pueden probar ideas dentro de un tema de interés; además, la meta es la construcción de significado y de relaciones que sirvan como modelo para un sistema formal, dando oportunidades para crear modelos mentales que reflejan la estructura y composición de los sistemas formales (Weir, 1987). A través de la manipulación que permiten los micromundos los alumnos son capaces de probar hipótesis o procedimientos que los lleven a una formalización del aprendizaje.

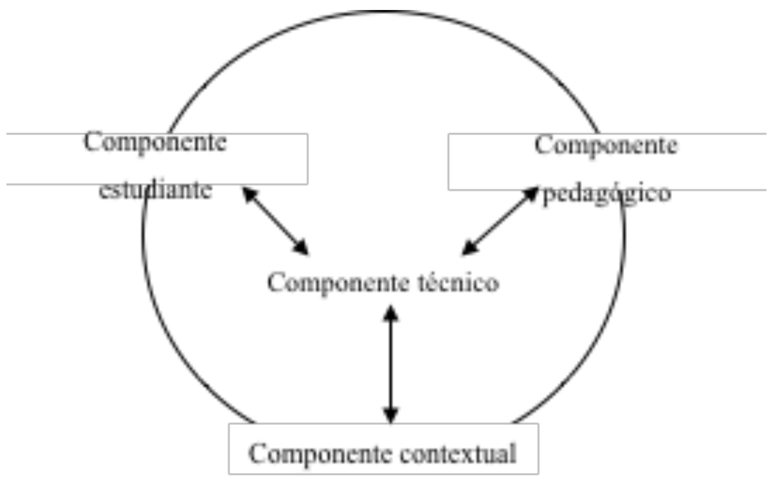
Para que un ambiente computacional se considere micromundo debe de contener cuatro componentes (Hoyles y Noss, 1987):

- *El componente del estudiante*. Entendimientos y concepciones parciales existentes que el alumno trae consigo a la situación didáctica.
- *El componente técnico*. Software o lenguaje de programación, y un conjunto de herramientas que proveen un sistema de representaciones para la comprensión de una estructura matemática o campo conceptual.

- *El componente pedagógico.* Estructura de la investigación y exploración de los conceptos plasmados en el componente técnico (los aspectos físicos puede ser el docente, libro, cartel).
- *El componente contextual.* Entorno social de las actividades.

Los componentes se relacionan como se muestra en la Figura 1, teniendo como centro el componente técnico, integrando cada uno de los demás componentes en una doble dirección.

Figura 1. Relación de componentes que integran un micromundo



Nota. Modelo basado en la propuesta de Hoyles y Noss (1987)

Telesecundaria unitaria y el análisis por interacciones

Dentro de las modalidades presentes en la secundaria, se ubica la telesecundaria, la cual es atendida con apoyo de un maestro generalista por grupo (SEP., 2017). Una característica de la modalidad, es ofrecer un servicio educativo con el apoyo de los medios electrónicos de comunicación social y con materiales impresos (Flores y Albarrán, 2008).

En el sistema de la telesecundaria existe la modalidad de escuelas unitarias o conocidas como multigrado, la cual es aquella donde los docentes atienden a alumnos de diversos grados en una misma aula. A nivel nacional, estas escuelas representan el 33.1% en telesecundarias, secundarias comunitarias e indígenas (12 a 15 años); y atienden al 9.7%, 8.6% y 10.2% de alumnos respectivamente, en el ciclo escolar 2019- 2020 (Mejoredu, 2021). Si bien, no es un porcentaje mayor a la mitad de las telesecundarias, el realizar estudios en esta modalidad ayuda a visualizar la educación desde un panorama alejado a lo que propone el currículo segmentado por grados escolares, otorgando la posibilidad de visualizar qué sucede en una aula donde predomina la diversidad, en la cual se puede suscitar un aprendizaje colectivo y en el que los alumnos desarrollan su capacidad de argumentación y discusión entre pares (Bustos, 2013).

Además, existe una invisibilidad de la escuela multigrado en el ámbito de la investigación educativa (Arteaga, 2011). Los estudios son relativamente recientes, escasos y de corte más casual (Mora, 2017).Por otra parte, en estudios previos (Block et al., 2014; Santos, 2011; Corro y Bolaños, 2018; Reséndiz et al., 2017, Gallardo, 2004) se ha mostrado la importancia que cobran las interacciones en el aula multigrado, como medio de aprendizaje y como medio de convivencia, por tal razón, para nuestro estudio se han considerado aportes de dichos estudios con la intención de caracterizar las interacciones que se dan en el aula unitaria de telesecundaria.

Una interacción es entendida como la comunicación con otro distinto a uno mismo, y es mediante este proceso que los sujetos adquieren capacidad reflexiva para verse a sí mismos y para dar forma y sentido a la realidad que los rodea (Rizo, 2006).

En educación multigrado las interacciones que se presentan determinan una relación con los demás elementos que influyen sobre la construcción colectiva de conocimiento, ya que el espacio es atravesado por tensiones, cambios y contradicciones abiertas a múltiples flujos culturales, locales y globales (Lara y Juárez, 2019), por tanto, el ubicar a las interacciones como medio para analizar el RP favorece a la compresión de la toma de decisiones, los intercambios de experiencias y saberes, las negociaciones y los resultados a los que llegaron los participantes en cada actividad.

Método

Se trata de un estudio cualitativo con alcance exploratorio. La población está integrada por 18 participantes, alumnos pertenecientes a la telesecundaria unitaria No. 316 ubicada en el municipio de Apaseo el Alto, perteneciente al estado de Guanajuato y ubicada en un contexto rural. De los 18 alumnos participantes cinco pertenecen a primer grado, ocho a segundo y cinco a tercer año.

A partir del planteamiento del objetivo y seleccionar la población de estudio, se trazó una ruta metodológica, la cual se divide en dos fases. En la primera fase se eligieron dos micromundos (Excel y GeoGebra), el diseño de las actividades, la primera aplicación y el análisis de los resultados obtenidos. La segunda fase la constituye el rediseño de las actividades, la segunda aplicación, análisis de datos obtenidos y resultados. Para términos prácticos, en esta ocasión retomaremos solamente la segunda fase metodológica.

En la segunda fase se realizó un rediseño de actividades en GeoGebra para el desarrollo del micromundo de exploración, estableciendo cinco actividades: una de exploración, dos actividades de identificación (relación entre segmentos por un deslizador y relación entre triángulos semejantes) y dos actividades de construcción (construcción de dos segmentos bajo una razón dada y construcción de un mosaico con un factor escala).

Dentro de las actividades del rediseño se planteó establecer una gradualidad, en donde la primera actividad funcionara como una oportunidad para que los participantes reconocieran los elementos del micromundo. En la segunda actividad se sigue contemplando una exploración, pero con implicaciones ya del RP. A partir de la actividad 3, se esperaba que los participantes pudieran manejar las herramientas de GeoGebra con un grado adecuado, en donde les fuera posible a los participantes expresar su RP.

En la tabla 3 se expone el objetivo de cada actividad y se explica a grandes rasgos en qué consistía; además, se integra la indicación que recibieron los participantes al momento de responder.

Tabla 3. Actividades de la aplicación y su objetivo

Actividad	Objetivo
Actividad 1. Exploración	Identificar las diferentes herramientas y funciones que provee GeoGebra por medio de una exploración libre en los equipos de trabajo.
Actividad 2. Relación entre segmentos por un deslizador	Conocer la forma en la que los alumnos interpretan la relación entre dos segmentos a través del uso de un deslizador.
Actividad 3. Construcción de dos segmentos bajo una razón dada	Establecer una relación entre dos segmentos a partir de una razón 0.5:1 con el uso de un deslizador o algún otro procedimiento establecido por los alumnos.
Actividad 4. Relación entre triángulos semejantes	Identificar la manera en que los alumnos comprenden la relación entre dos triángulos a partir de las longitudes de sus lados y su área.
Actividad 5. Construcción de un mosaico con un factor escala	Conocer el tipo de relación que establecen los alumnos entre el mosaico original y el solicitado a escala (1.5:1) a partir de las diferentes herramientas involucradas en el trazo de polígonos.

Resultados

Relación incompleto – aditivo

Dentro de las relaciones que se establecieron entre niveles, se han identificado diferentes intenciones independientemente de qué niveles estén relacionados, por ejemplo, a continuación, se muestra una interacción correspondiente a la actividad cinco (construcción de un mosaico a partir de otro bajo una razón de 1.25:1), la cual evidencia la relación de razonamientos a partir de la justificación de un procedimiento incorrecto:

E-2.2: A ver saca la medida de todo esto para saber de cuanto tiene que quedar

E-2.1: 3.5 más 3.5 son 7

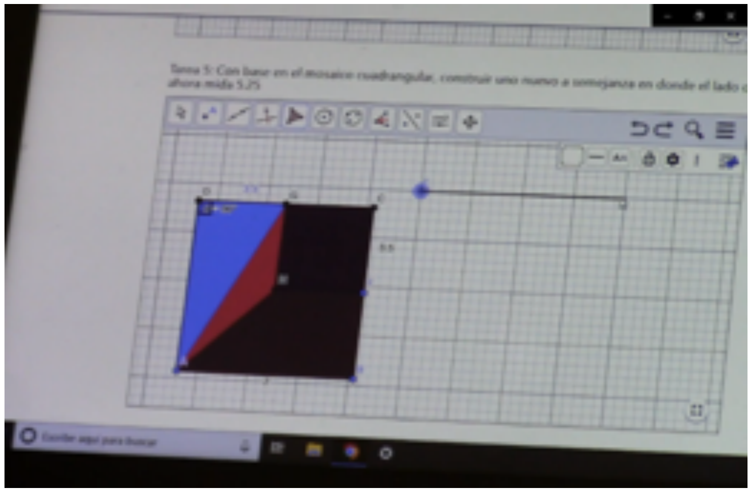
E-2.2: No, pero es que 7 por tres son…

E-2.1: 3.5 más 3.5… 7, 14, 7 más 7 es 14 más otros 7, 21 más otros 7, 28

E-2.2: Cual 28

E-2.1: Entonces nos tiene que salir de 28 /refiriéndose al contorno del mosaico/ si este salió de 3 cuadros y medio este va a ser de 4

Figura 2. Representación de la longitud basada en 4 cuadros de la cuadricula



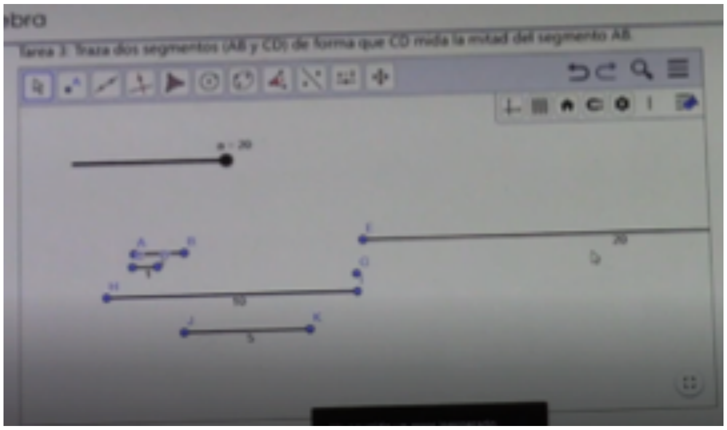
Se reconocen dos razonamientos de diferente nivel, por un lado, el incompleto y por el otro el aditivo. El participante E-2.1 explicita un razonamiento aditivo en el intento de saber cuánto debe ser el contorno del mosaico, basándose en que la medida de referencia es 3.5, decide sumarlo dos veces, obteniendo como resultado 7, por lo que continúa con su estrategia aditiva sumando iteradamente 7 tres veces más, pues conoce que el mosaico es cuadrangular.

A partir de la estrategia desarrollada, determinan que el mosaico debe tener un contorno de 28, pero, ante este resultado interviene un razonamiento incompleto, ya que confunden la magnitud a la que se están refiriendo, es decir, el 28 tiene relación con las unidades en las que se expresan las medidas, mientras que a decir "si este salió de 3 cuadros y medio este va a ser de 4" (ver figura 2) hace referencia a la cuadricula del fondo.

Relación incompleto- cualitativo – aditivo - pre-proporcional

Dentro de las posibles relaciones entre niveles, se presentaron situaciones en donde se vieron involucrados más de dos tipos de razonamiento, por ejemplo, en la siguiente interacción, perteneciente a la actividad tres (construcción de dos segmentos a partir de una razón 0.5:1), se puede identificar el nivel incompleto, cualitativo, aditivo y pre-proporcional. La interacción gira entorno a la figura 3, que era lo que en ese momento veían los alumnos.

Figura 3. Segmento de longitud 20, de 10 y de 5



Ap: Ok, y ¿Qué relación hay entre el del 20 y el 5?

E-2.3: Que son la tercera parte

E-2.1: La tercera... la cuarta parte

E-2.2: Tercera

Ap: A ver, platíquenlo y regreso

E-2.2: Que es la tercera

E-2.1: La cuarta

E-2.2: Por decir, cuando esta la divides entre otra más chiquita y luego la divides otra vez, ¿verdad que sí? /refiriéndose a E-2.3/

E-2.1: No, porque 5 más 5 son 10, y 5 más 5 son otros 10, suman 20, entonces 5 sería la cuarta parte

Se integran cuatro niveles de razonamiento: incompleto, cualitativo, aditivo y pre-proporcional, los cuales pertenecen a diferentes interacciones. En la segunda intervención del aplicador pregunta por la relación entre 20 y 5, obteniendo dos respuestas diferentes, por un lado, E-2.3 responde que es la tercera parte, mientras que E-2.1 corrige y menciona que en realidad es la cuarta parte. En el caso de la respuesta “la tercera parte”, es uno de los casos que ejemplifica que los errores de los alumnos no siempre son injustificados, puesto que el razonamiento se basa en la relación 20÷2=10÷2=5, la cual se interpreta como “la mitad de la mitad de un número”, lo que implica tres transformaciones, pasar del 20 al 10 y luego del 10 al 5.

A partir de que el aplicador se retira, se genera una negociación entre los alumnos que relaciona cuatro niveles, por un lado, la participante E-2.2 menciona, “cuando esta la divides entre otra más chiquita y luego la divides otra vez” haciendo referencia a la tercera parte. En esta idea expuesta se identifica como la alumna hace uso del nivel cualitativo para justificar un nivel incompleto, pues recurre al lenguaje cualitativo, haciendo uso de términos como “la chiquita” y procesos como “la divides” y no expresar las cantidades relacionadas, esto muestra que los alumnos recurren con mayor confianza al análisis cualitativo que al cuantitativo, sobre todo en la descripción de sus procesos, tal como lo reporta Sánchez (2013).

Por otro lado, el alumno E-2.1 defiende su postura de que es la cuarta parte, mencionando “no, porque 5 más 5 son 10, y 5 más 5 son otros 10, suman 20, entonces 5 sería la cuarta parte”, al igual que en la respuesta de E-2.2, el alumno E-2.1 se sirve de un nivel con menor carga cognitiva para explicar un nivel más sofisticado, es decir, retoma el nivel aditivo para explicar un nivel proporcional. En esta ocasión se considera que está presente el nivel proporcional debido a que comprende que la cuarta parte está relacionada con el valor que presenta el segmento cuando el deslizador toma diferentes valores, comprendiendo que la razón que regula los valores del deslizador es 0.25 o la cuarta parte.

Conclusiones

Se ha evidenciado que los niveles se pueden relacionar por diferentes motivos, tales como justificar procedimientos incorrectos, a partir de una corrección, uso de razonamientos más sencillos para explicar razonamientos más complejos y como medio de comprobación. A partir de ello, se puede identificar que todos estos motivos de relación tienen en común la complementación a un razonamiento principal, es decir que uno de los niveles está en función de otro, por ejemplo, en el caso de la explicación de razonamientos más demandantes como el pre-proporcional o proporcional, los razonamientos de menor actividad matemática como el aditivo o cualitativo están en función a los primeros. En síntesis, la relación de niveles favorece procesos como la justificación, corrección, explicación y comprobación de situaciones proporcionales.

Los alumnos pueden razonar de manera diferente de acuerdo al tipo de problema o recurso lo cual coincide con estudios previos como Öztürk, et al. (2021) quien reporta que las habilidades de razonamiento proporcional difieren según el tipo de problemas. En nuestro estudio, encontramos que, de acuerdo con el tipo de problema y las preguntas planteadas el razonamiento cambia, mientras que en alguna actividad se puede mostrar una aproximación incorrecta en otra puede haber un razonamiento sofisticado.

El micromundo ha permitido evidenciar el razonamiento con el que cuentan los participantes, permitiendo establecer relaciones entre lo que ya conocían y lo que están explorando, permitiéndoles probar procedimientos, establecer diálogos de aprendizaje a partir de las actividades diseñadas y descartar ideas a partir del ensayo y error. Cabe señalar que el micromundo no solo lo compone las herramientas integradas en GeoGebra, sino también el diseño actividades, las intervenciones por parte del investigador y el interés generado en los alumnos.

A partir de los resultados se plantea proporcionar a las y los docentes características del razonamiento proporcional para que sean capaces de identificar y promover el desarrollo de las habilidades de sus estudiantes. Además de que puedan seleccionar y elaborar tareas matemáticas adecuadas que permitan la introducción al razonamiento desde diferentes aproximaciones y poder romper con la práctica generalizada en donde se asume que la regla de tres en una de las únicas maneras de aproximarse a las situaciones proporcionales, al igual que apoyar a los alumnos a sustituir la relación aditiva por la multiplicativa, y poder discriminar las situaciones proporcionales de las que no lo son.

Respecto a algunas líneas futuras para el trabajo, se considera importante profundizar en el impacto de los micromundo en la cotidianidad de la escuela multigrado, estableciendo algún taller de preparación para docentes y alumnos, en donde a los primeros se les forme en la integración de GeoGebra para trabajar la proporcionalidad, mientras que en el caso de los alumnos se les oriente en el dominio de las herramientas a profundidad.

Referencias

Arteaga, P. (2011). *Los saberes docentes de maestros de primaria con grupos multigrado* [Tesis de maestría, Consejo Mexicano de Investigación Educativa]. Red temática de Investigación de Educación Rural.

Block, D., Mendoza, T., y Ramírez, M. (2014). ¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica. SM de Ediciones.

Bustos Jiménez, A. M. (2013). El espacio y el tiempo en la escuela rural: algunas consideraciones sobre la didáctica multigrado. *Investigación En La Escuela*, *79*, 31–41. https://doi.org/10.12795/ie.2013.i79.03

Butto, C., Fernández, J., Araujo, D. C., y Ramírez, A. I. (2019). El razonamiento proporcional en educación básica. *Horizontes Pedagógicos*. https://doi.org/10.33881/0123-8264.hop.21204

Corro, E. S. L., y Bolaños, D. J. (2018). La relación tutora entre estudiantes en una clase multigrado de México. *Nodos Y Nudos*, *6*(45). https://doi.org/10.17227/nyn.vol6.num45-10390

Flores, R. C., y Albarrán, A. M. R. (2008). La Telesecundaria, ante la sociedad del conocimiento. Revista Iberoamericana De Educación (Impresa), 44(7), 1–11. https://doi.org/10.35362/rie4472187

García, E., Santiago, F. y Zepeda, G. (2019). Enseñanza de las matemáticas en escuelas multigrado y telesecundarias. En S. Otten, A.G. Candela, A. de Araujo, C. Haines y C. Munter (Eds.). Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (pp. 1751-1755). St Louis, MO: University of Missouri. ISBN: 9780578577913.

Godino, J., y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su Didáctica para Maestros*. Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada. 412-443

Healy, L., y Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *Zdm – Mathematics Education*, *42*(1), 63–76. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0193-5

Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M. J., y Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type, and problem setting. *Journal of Research in Science Teaching*, *26*(3), 205–220. https://doi.org/10.1002/tea.3660260303

Hoyles, C., y Noss, R. (1987). Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *18*(4), 581–595. https://doi.org/10.1080/0020739870180411

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983). "Proportional reasoning of early adolescents". In: R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Lamon, S. J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*.

Lesh, R., Post, T. R., y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr, y J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93-118). National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates.

Mora, L. R. G. (septiembre, 2017b). *Diversidad y prioridades educativas en escuelas multigrado. Estudio de caso en México*. https://sinectica.iteso.mx/index.php/SINECTICA/article/view/715

Mejoredu. Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación. (2021). *Indicadores nacionales de la mejora continua de la educación en México. Cifras del ciclo escolar 2019-2020.*

Mochón Cohen, S., (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 24(1), 133-157.

Modestou, M., y Gagatsis, A. (2010). Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), 36–53. https://doi.org/10.1080/10986060903465822

Noss, R., y Hoyles, C. (2019). Micromundos, Construccionismo y Matemáticas. *Educación Matemática*, *31*(2), 7–21. https://doi.org/10.24844/em3102.01

Öztürk, M., Demir, Ü., y Akkan, Y. (2021). Investigation of Proportional Reasoning Problem Solving Processes of Seventh Grade Students: A Mixed Method Research. *International Journal on Social and Education Sciences*, *3*(1), 48–67. https://doi.org/10.46328/ijonses.66

Sánchez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 65-97.

SEP. (2017). *Aprendizajes Clave, para la educación integral*. México: SEP.

Verdú, C. F., y Ciscar, S. L. (2012). Characteristics of the development of proportional reasoning in Primary and Secondary School. *Enseñanza De Las Ciencias*, *30*(1), 129. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Weir, S. (1987). *Cultivating Minds: A Logo Casebook*. HarperCollins Publishers.