



EL USO DEL SEGMENTO DE LÍNEA Y LA SHIKI COMO HERRAMIENTAS PSICOLÓGICAS PARA FORMAR UN PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN ESTUDIANTES DE SEGUNDO AÑO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Sofía Karina Vázquez Gómez

Benemérita y Centenaria Escuela Normal de Jalisco

sofia.vazquez@bycenj.edu.mx

Silvia Eduvigis Hinojosa Rizo

Benemérita y Centenaria Escuela Normal de Jalisco

silvia.hinojosa@bycenj.edu.mx

Areli Norma Tapia Ramírez

Benemérita y Centenaria Escuela Normal de Jalisco

areli.tapia@bycenj.edu.mx

Área temática: A.6) Educación en campos disciplinares.

Línea temática: Educación Matemática

Tipo de ponencia: Reporte final de investigación



Resumen

Esta investigación explora el uso del segmento de línea y la shiki como herramientas psicológicas para formar un pensamiento algebraico en estudiantes de segundo año de educación primaria. Se llevó a cabo un experimento de enseñanza en el que los estudiantes realizaron actividades en hojas de trabajo utilizando las herramientas psicológicas antes mencionadas. Tanto en el diseño de la investigación como en las hojas de trabajo, se utilizó como marco el método de Piotr Galperin para la formación planificada de las acciones mentales. La investigación muestra que el uso así diseñado de las herramientas psicológicas, ayudó a los estudiantes de segundo año de educación primaria que participaron en el experimento de enseñanza, a simbolizar, expresar la estructura aditiva de las cantidades y finalmente generalizar relaciones, procesos que se consideran componentes fundamentales del pensamiento algebraico.

Palabras clave: ÁLGEBRA, EDUCACIÓN PRIMARIA, ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA.

Introducción

Introducción al pensamiento algebraico a partir de edades tempranas y sus implicaciones

El aprendizaje del álgebra suele representar dificultad para algunos estudiantes a lo largo de su formación matemática, principalmente en la escuela secundaria, lo cual puede ser causado,

entre otras cosas, por la aritmetización del currículo a lo largo de la educación primaria, “la aritmética y álgebra han trazado históricamente una divisoria de aguas entre la primaria y la secundaria, lo concreto y lo abstracto, lo particular y lo general, los cálculos y las relaciones” (Schliemann, et al., 2011, p. 11).

Resolver problemas algebraicos implica comprender temas relativos a las relaciones funcionales, la generalización de patrones, relaciones numéricas, el modelar y simbolizar para expresar situaciones matemáticas y la formalización de generalidades (Butto y Rojano, 2010). Pensar algebraicamente implica poner en práctica hábitos de pensamiento como hacer-deshacer y diseñar reglas que le permitan simbolizar funciones (Driscoll en Cai et al. 2005).

En la actualidad, la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017) en el currículo mexicano adoptó la perspectiva de trabajar primero la aritmética y posteriormente el álgebra más formal en la escuela secundaria, sin embargo uno de sus ejes temáticos descrito en el programa de estudios de la educación básica propone el estudio del álgebra, en el que incluye temas algebraicos en situaciones de variación. Sin embargo, estas nociones algebraicas propuestas en el currículo no son claras y perceptibles a simple vista.

Tomando en cuenta la visión se decidió indagar cómo diversos currículos propician en los estudiantes de educación primaria los temas referentes al álgebra. Se considera que los planes de estudio pueden ser un medio poderoso para poder tener nociones acerca de cómo fomentar el pensamiento algebraico, de este modo, conocer cómo diversos enfoques trabajan el pensamiento algebraico es un referente valioso para poder dar sentido a la introducción de esta herramienta de pensamiento. Conocer la variedad de propuestas curriculares puede enriquecer la comprensión de la problemática y brindar herramientas para abordar la misma.

Enfoques curriculares para el álgebra temprana

Uno de los currículos de Rusia es el elaborado por Davidov y sus colegas, quienes proponen desarrollar la estructura algebraica a partir del manejo de relaciones entre cantidades asociadas con la medición de distintos objetos; propiciando que la aritmética resulte ser una aplicación del álgebra (Schmittau y Morris, 2004) y por tanto el aprendizaje del álgebra precede el aprendizaje de la aritmética.

Watanabe (2011) reporta cómo se propicia el pensamiento algebraico desde la educación primaria en el currículo japonés, el cual se lleva a cabo a partir de dos pilares fundamentales: el estudio funcional de relaciones (patrones) y expresiones matemáticas (“shiki”, en japonés). Las representaciones algebraicas comienzan desde el primer grado de la escuela primaria con la formulación de expresiones matemáticas y cantidades covariantes. Algunas de las herramientas utilizadas para abordar distintos temas algebraicos son: modelos lineales, representación parte-todo, uso de símbolos para representar generalizaciones o patrones y el uso de paréntesis. En estos currículos se apoyan en herramientas específicas para desarrollar el pensamiento algebraico como es el Modelo de segmento de línea y las Shiki.

Modelo de segmento de línea

El currículo de Davidov propone desarrollar algunas herramientas que permitan a los estudiantes adquirir o trabajar con ideas fundamentales, considerando que los esquemas son de suma importancia. En los primeros grados de educación uno de los esquemas que utilizan los “modelo de segmento de recta-lineal” o “modelo de segmento de línea”. Tienen la finalidad de beneficiar la comprensión teórica, ya que brindan modelos de relaciones abstractas, dando la oportunidad de analizar dichas relaciones, comprender sus propiedades y utilizarlas en diversas situaciones (Schmittau y Morris, 2004).

Shiki

El término japonés shiki 式 se define como expresión, fórmula, ecuación, estilo, ceremonia, rito o reglamentos de aplicación. En el contexto matemático y adaptando el término a la cultura occidental, la acepción que se le puede dar a shiki es expresión matemática, la cual incluye la representación de ecuaciones o desigualdades. La idea de expresión matemática se usa para “expresar ideas y relaciones usando notaciones matemáticas” (Watanabe, 2008, p.189).

El trabajo con Shiki se asocia a las relaciones cuantitativas, con el propósito que los estudiantes representen su pensamiento y a su vez expresen su razonamiento. Los usos relacionados a la Shiki están asociados a elaborar e interpretar expresiones matemáticas que impliquen las operaciones básicas, expresar matemáticamente sus relaciones y utilizar algunos símbolos para representar relaciones específicas (Watanabe, 2008).

Estado del conocimiento

Conceptualización del pensamiento algebraico

Se realizó un trabajo de indagación de diversos estudios para determinar en qué consiste tener un pensamiento algebraico (Kieran, 2018; Kaput, 2008; Mason y Sutherland, 2002; Carraher, Schliemann y Schwartz, 2008) a partir de dicha investigación se determinó que el pensamiento algebraico involucra tres ideas fundamentales: la generalización, simbolización y la expresión de estructuras. La intersección entre estas tres ideas da lugar al pensamiento algebraico del individuo, de modo que el pensamiento algebraico consiste en la puesta en práctica de estos tres procesos.

Generalización

Carraher, Schliemann y Schwartz (2008) mencionan un tipo de generalización en el que se maneja una expresión aritmética como un caso general. Mason y Sutherland (2002) consideran el pensamiento algebraico como la transición de lo particular a lo general en donde se determina qué es lo que se puede generalizar de lo concreto. Comunicar generalizaciones, o

particularizaciones de generalidades al inducir cada lección con pensamiento algebraico es fundamental para tener éxito en la práctica con el álgebra (Mason y Sutherland, 2002).

Expresar estructura

En diversos estudios se ha encontrado que la generalización es un referente importante al momento de definir el pensamiento algebraico, ya que tiene un componente estructural, el generalizar implica identificar la estructura, de igual forma lo estructural involucra generalizar. De modo que la estructura ayuda a ejemplificar o visualizar alguna propiedad general, la generalización lleva a la estructura y la estructura a la generalización, por ejemplo, las propiedades de las operaciones (conmutativa, asociativa, distributiva, etc) son una generalidad de la estructura matemática. Mason y Sutherland (2002) manifiestan que el pensamiento algebraico emerge cuando los individuos detectan y comunican estructuras.

Simbolizar

Kaput (2008) por un lado se refiere a la necesidad de expresar estructuras, por el otro, toma en cuenta la perspectiva simbólica del álgebra en la que menciona que el núcleo del pensamiento algebraico se integra de procesos de simbolización cuya función es de generalizar y razonar generalizaciones, a través de un sistema de símbolos bien estructurado, el cual, de acuerdo con Carraher et al. (2008) debe insertarse de forma paulatina (desde el álgebra temprana) haciendo que los estudiantes piensen en el trasfondo de los problemas matemáticos para que poco a poco se vaya introduciendo la notación matemática formal que represente dichos problemas.

Pregunta general de investigación

¿Cómo la función de las herramientas psicológicas: Modelo de Segmento de Línea y Shiki sirve como medio para formar un pensamiento algebraico en alumnos de segundo año de educación primaria?

Pregunta específica de investigación

¿Cómo utilizan los estudiantes de segundo grado de primaria las herramientas psicológicas que se les proporcionan: modelo de segmento de línea y shiki, para expresar las relaciones que existen entre las cantidades?

Desarrollo

Enfoque teórico

Teoría de la actividad y sus aspectos filosóficos

La Teoría de la Actividad es una teoría que fue construida con base en los fundamentos propuestos por Vygotsky. Uno de los conceptos desarrollados por Vygotsky fue el de la Acción Mediada. Los individuos actúan sobre la realidad para adaptarse a ella transformándola y transformándose a sí mismos a través del uso de mediadores como herramientas y signos, se ubica al uso de los signos dentro de la categoría de actividad mediada porque es a través de ellos que el individuo afecta su propio comportamiento, tanto los signos como las herramientas tienen una función mediadora (Vygotsky, 1979).

La Teoría de la “actividad” se compone por el sujeto y el objeto que son mediados por un artefacto. El sujeto es la persona dedicada a la actividad y que realiza acciones, el objeto es el motivo de la actividad, y se lleva a cabo por el sujeto. Finalmente, un artefacto es el encargado de mediar la actividad, ejemplos de artefactos pueden ser los instrumentos, las máquinas, las herramientas o el lenguaje.

Herramientas psicológicas en torno a la teoría de la actividad

Para Vygotsky el proceso de aprendizaje no consiste en que el individuo explore el mundo por sí mismo, lo considera como un proceso que consiste en que el individuo se adueñe de métodos de acción en una cultura determinada, en donde las herramientas simbólicas, sistemas lingüísticos y matemáticos son de suma importancia (Kozulin y Presseisen, 1995). La importancia de las herramientas radica en que son los medios que permiten al sujeto esta apropiación cultural y social. Vygotsky (1979) postula que el uso de las herramientas psicológicas contribuye a la formación de funciones psicológicas superiores.

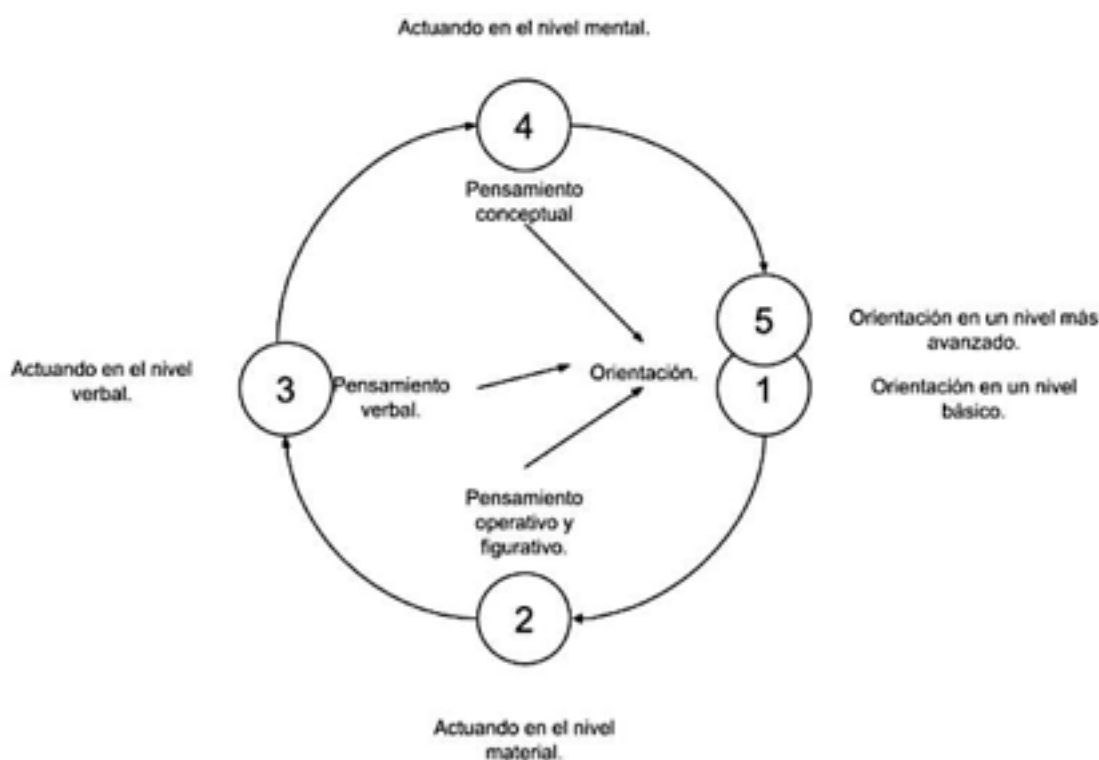
El enfoque de Galperin sobre la formación de las acciones mentales

El marco teórico que se toma en cuenta para realizar la presente investigación gira en torno a la Teoría de la Actividad, específicamente el enfoque que Galperin le da a la misma. Se considera que este enfoque es un referente adecuado para la investigación, debido a que da un tratamiento educativo.

El enfoque de Galperin considera las condiciones psicológicas para la formación de las acciones mentales, en donde una acción mental se concibe como el resultado de una conversión de procesos externos realizados inicialmente a través de algunas herramientas; acciones, imágenes y representaciones mentales son el producto de la internalización de procesos externos (Podolskij, 2008).

Galperin concibe el aprendizaje como la internalización de la acción al pensamiento, y propone una serie de pasos del proceso de enseñanza-aprendizaje para producir la actividad mental (Heanen, 2001), tratando de explicar la formación de las acciones mentales a partir de la acción exterior. Algunos autores como Arieviditch y Haenen, (2005) y Haenen, (2001) al examinar el enfoque de Galperin prestan atención en dos propiedades: la calidad de la acción y el nivel de abstracción de la acción. Incluyen estas dos propiedades en un modelo en espiral (véase figura 1), en el cual describen de manera gráfica la forma en que se puede formar una acción mental a través del tránsito por diversas etapas y su internalización. Cuando una acción transita por cada uno de estos componentes se puede garantizar que se forma una acción mental. De este modo, para cada uno de los elementos de abstracción se requieren diferentes tipos de materiales y representaciones.

Figura 1. Traducción de esquema realizado por Arieviditch y Haenen (2005) para explicar el enfoque propuesto por Galperin de la Formación Planificada de las Acciones Mentales



¿Cómo ubicamos el marco teórico en la presente investigación?

Se identificó que tanto el currículo ruso con el modelo de segmento de línea y el currículo japonés con la shiki, incluyen herramientas para facilitar el desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos de primaria. De acuerdo con la teoría de la actividad, en donde el uso de herramientas es un mediador entre el sujeto y el objeto, en este marco conceptual se

toman a los sujetos como los estudiantes con quienes se realiza la investigación, el objeto es el aprendizaje del álgebra y las herramientas son el modelo de segmento de línea y shiki. De esta forma, se estudia cómo los estudiantes de un grupo de una primaria en la Ciudad de México utilizan estas herramientas enfocadas a la formación de un pensamiento algebraico.

Como parte del marco teórico que se consideró para la elaboración de la presente investigación está el enfoque de Galperin acerca de los pasos para la formación planificada de las acciones mentales. Los elementos de este enfoque que fueron base constructora del experimento de enseñanza son los niveles, materializado, verbal, mental para la formación de acciones mentales con su componente de orientación y las propiedades de la acción para el análisis de los resultados.

Enfoque metodológico

Esta investigación de tipo cualitativo representa un experimento de enseñanza, por ser “un modelo explicativo del desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes” (Valverde, 2014, p.10), con el fin de comprender e investigar cómo aprenden los estudiantes en la educación matemática, específicamente en actividades que se intenciona un pensamiento algebraico (Bernabeu et al., 2019).

El experimento de enseñanza de la presente investigación se llevó a cabo en una escuela primaria de la Ciudad de México ubicada en la alcaldía Cuauhtémoc con ocho estudiantes de segundo grado de educación primaria, los cuales conforman la totalidad de alumnos de segundo año de la institución, se desarrolló durante las clases reales de las horas destinadas al taller de matemáticas, constó de 6 sesiones de aproximadamente 40 minutos cada una, el corpus de los datos se recopiló por tres medios distintos: hojas de trabajo, grabaciones de audio de las sesiones, y notas de campo.

Diseño del experimento de enseñanza

El aspecto teórico que se tomó en cuenta para diseñar los instrumentos de trabajo es el enfoque propuesto por Galperin, a partir de la Teoría de la Actividad, se tomaron en cuenta los niveles para la formación de acciones mentales descritos en Heanen y Arievitich (2010), los cuales son: nivel materializado, verbal y mental y su orientación.

Nivel materializado. Se trabajó al mostrar a los estudiantes relaciones matemáticas utilizando objetos físicos que fueron las regletas de cuisenaire, en algunos casos se nombró cada regleta con una literal para establecer algunas de sus relaciones.

Orientación. Consistió en brindar a los estudiantes un modelo de razonamiento que les permitiera el uso de las herramientas psicológicas propuestas.

Nivel verbal. Los estudiantes brindaron explicaciones orales acerca de lo que realizaron durante su proceso de construcción de relaciones a partir de las herramientas psicológicas.

Etapas mentales. Los estudiantes responden algunos ejercicios en los que utilizan las herramientas psicológicas sin necesidad de utilizar algún material o expresar sus procedimientos en voz alta.

Las fichas de trabajo guían las actividades con respecto a las etapas propuestas en el modelo para la formación de acciones mentales propuesto por Galperin. Se incluyen en cada una de las hojas de trabajo dos herramientas psicológicas ubicadas en los currículos ruso de Davidov y el japonés, el modelo de segmento de línea y Shiki (expresión matemática) respectivamente.

Para el diseño de las sesiones de trabajo se realizó una indagación acerca de la forma en que el currículo ruso de Davidov y Elkonin desarrolla en los estudiantes el pensamiento algebraico, se consultó tanto la descripción que Schmittau (2004) realiza del currículo como el libro de texto de primer grado del modelo ruso realizado por Davydov et al. (2013).

Resultados obtenidos

Se presenta a continuación el análisis de los resultados en torno a la pregunta de la investigación: ¿Cómo utilizan los estudiantes de segundo grado de primaria las herramientas psicológicas que se les proporcionan: modelo de segmento de línea y shiki, para expresar las relaciones que existen entre las cantidades?

A lo largo del experimento de enseñanza se observó que el uso que los estudiantes de segundo grado dieron a las dos herramientas psicológicas que se les proporcionaron: modelo de segmento de línea y shiki tuvieron distintos usos.

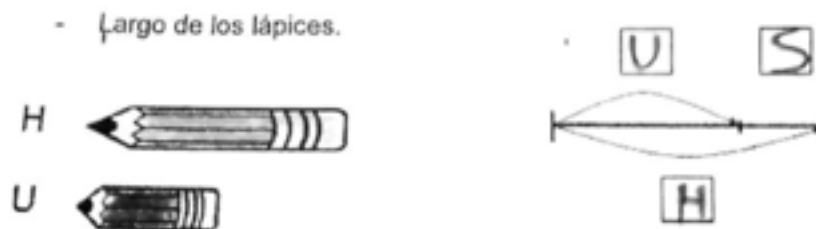
Usos asignados al modelo de segmento de línea.

1. Uso instrumental. Fungió como medio que permitió a los estudiantes la construcción de shikis y realizar una representación gráfica de las magnitudes que se estaban comparando y a partir de ello establecer una relación entre las magnitudes.
2. Uso para comparación de magnitudes. Permitieron a los estudiantes representar comparaciones del tipo: mayor que, menor que e igual y desigual que, facilitando el simbolizar gráficamente la desigualdad entre los elementos. Con este se logró introducir la idea de que se puede identificar por cuánto son diferentes dos magnitudes, y representar esta diferencia entre los dos segmentos comparados, al reconocer y simbolizar este segmento les permitió distinguir que se pueden realizar las acciones de aumentar y disminuir las cantidades para lograr una igualdad.

Por ejemplo, en la figura 2, en el modelo de segmento de línea los estudiantes señalan que el segmento más largo corresponde al lápiz más largo, mientras que el segmento más corto

corresponde al lápiz menos largo de la comparación, sin embargo se señala el segmento sobrante, el cual los estudiantes nombran con una literal. Esta idea de asignar un valor a un segmento desconocido permite en un momento posterior establecer relaciones parte-todo y relaciones aditivas, por ejemplo, $U+S=H$.

Figura 2. Representación del modelo de segmento de línea por uno de los estudiantes



3. Uso para representar cantidades de naturaleza abstracta. Permite a los estudiantes representar gráficamente dos cantidades y simbolizarlas a través de literales, al fijar la atención en las cantidades y no en los objetos y de esta forma establecen relaciones entre ambas.

Shiki y las relaciones expresadas

En el caso de Shiki, lograron representar a través de símbolos matemáticos, literales o números, las relaciones entre diferentes cantidades asociadas a propiedades de objetos.

1. Uso de la shiki para expresar relaciones del tipo $<$, $>$. Se trabaja con este tipo de expresiones debido a que se considera que pueden ser un medio para que los estudiantes trabajen con expresiones de igualdad, es a través de estas construcciones previas que se puede posibilitar a los estudiantes la construcción de nuevas relaciones. Las relaciones que implican el uso de los símbolos $<$, $>$ consideran sólo dos cantidades por ejemplo, $A < B$ en donde se comparan sólo dos propiedades de dos objetos. Se observó a lo largo de la presente investigación que los estudiantes expresaron shikis del tipo mayor que y menor que en su mayoría exitosas.
2. Uso de shiki para expresar relaciones que impliquen el uso del símbolo \neq Con el objetivo de que los estudiantes determinaran que dos cantidades no eran iguales y señalaran por qué cantidad eran distintas, por ejemplo, $A \neq B$ por C .
3. Uso de shiki para expresar relaciones de igualdad. Se observa que las relaciones que implican el símbolo $=$ benefician (no en todos los casos) a la construcción de relaciones aditivas. A partir de las relaciones hechas por los estudiantes se identificaron las siguientes categorías:

Sin Relación Aditiva (SRA): Se denota una expresión por adición, sin embargo no existen las correspondencias adecuadas entre los elementos, esto quiere decir que no se asocia el objeto expresado con su respectiva propiedad extensiva (masa, longitud, volumen, etc) a la parte que se señala.

Relación Aditiva Incipiente (RAI): En la relación aditiva incipiente el estudiante asocia eficazmente los objetos con sus partes, relaciona la magnitud de la propiedad extensiva del objeto en particular con el tamaño de la parte en el modelo de segmento de línea, sin embargo no le es posible expresar matemáticamente en su shiki una relación del tipo aditivo.

Relación Aditiva (RA): El sujeto vincula la magnitud a la parte que le corresponde y expresa eficazmente la relación que mantienen dichos objetos en términos aditivos. Se presentan relaciones de igualdad en las que una magnitud se compone de la suma o resta de otras dos magnitudes.

En conclusión, durante el experimento de enseñanza se observó que los estudiantes utilizaron las shikis para representar relaciones matemáticas. Las relaciones del tipo menor que, mayor que y desigual que en su mayoría fueron correctas, las cuales ciertos casos trabajan con la relación parte-todo. Por otro lado, no en todos los casos los estudiantes presentaron relaciones aditivas correctas. Cuando se habla de una relación aditiva, se está hablando de que el individuo que la maneja tiene un nivel de abstracción más alto que cuando solo se habla de la relación parte-todo. Identificar la relación aditiva no solo requiere de considerar las partes del objeto sino de las magnitudes que están asociadas a dichas partes y que posteriormente van a ser operadas.

Conclusiones

- La función que tienen las herramientas psicológicas utilizadas en la presente investigación: modelo de segmento de línea y shiki, es la de representar las relaciones entre las cantidades en su forma simbólica, y de esta forma fijar la atención en la estructura de dichas relaciones.
- El modelo de segmento de línea y la Shiki son un medio que permite al estudiante no solo percibir que dos cantidades son distintas, sino tratar de comprender qué es lo que las hace distintas y cómo puede expresarse matemáticamente. Así mismo, brinda pautas para considerar que la distinción entre dos cantidades puede transformarse en una igualdad.
- En este sentido, las herramientas psicológicas permitieron la simbolización, expresión de la estructura de las cantidades y finalmente llevan a la generalización de las relaciones estudiadas, componentes que se consideran necesarios para desarrollar un pensamiento algebraico, aunque se observó que los estudiantes tienen más facilidad para el manejo y representación de relaciones entre cantidades en el modelo de segmento de línea que en la Shiki.

- Finalmente, el marco teórico adoptado para el diseño del experimento de enseñanza, benefició el uso de las herramientas psicológicas por parte de los estudiantes. Al transitar por las etapas del modelo para la formación planificada de acciones mentales se percibió que los estudiantes fueron internalizando algunas relaciones matemáticas a través de las herramientas psicológicas con las que se trabajó. De igual manera, el tránsito por estas etapas también permite dar cuenta de la falta de internalización en algunos casos.

Referencias

- Arievitch, I., y Haenen, J. (2005). Connecting Sociocultural Theory and Educational Practice: Galperin's Approach. *Educational Psychologist*, 40(3), 155-165. doi: 10.1207/s15326985ep4003_2
- Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2019). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en Educación Matemática. *Unipluriversidad*, 19(2), 103-123. doi: 10.17533/udea.unipluri.19.2.07
- Butto, C., y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22(3), 55-86.
- Cai, J., Lew, H., Morris, A., Moyer, J., Fong Ng, S., y Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective. *ZDM*, 37(1), 5-15. Doi: 10.1007/bf02655892
- Carraher, D., Schliemann, A., y Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J, Kaput., D, Carraher., & M, Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Routledge.
- Haenen, J. (2001). Outlining the teaching-learning process: Piotr Gal'perin's contribution. *Learning And Instruction*, 11(2), 157-170. doi: 10.1016/s0959-4752(00)00020-7
- Kaput, J. (2008). 1 What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning?. In J, Kaput., D, Carraher y M, Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). Routledge.
- Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. In C, Kieran (Ed), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (pp. 79-105). Springer, Cham.
- Kozulin, A., y Presseisen, B. (1995). Mediated learning experience and psychological tools: Vygotsky's and Feuerstein's perspectives in a study of student learning. *Educational Psychologist*, 30(2), 67-75. Doi: 10.1207/s15326985ep3002_3
- Mason, J., y Sutherland, R. (2002). *Key aspects of teaching algebra in schools*. Sudbury, Suffolk: QCA Publications.
- Podolskij, A. (2008) *Bridging a Gap between Psychology and Instructional*

- SEP. (2017) Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica. Ciudad de México: SEP
- Schliemann, A., Carraher, D., y Brizuela, B., (2011). El carácter algebraico de la aritmética. Buenos Aires: Paidós.
- Schmittau, J., y Morris, A. (2004). The Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, 8(1), 60 - 87.
- Valverde, G. (2014). Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes / *Actualidades Investigativas En Educación*, 14(3), 1 - 20. doi: 10.15517/aie.v14i3.16095
- Vygotsky, L. S. (1979). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard university press.
- Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A Japanese perspective. In C, Greenes., & R, Rubenstein (Eds), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* , (pp. 183-193). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Watanabe, T. (2011). Shiki: A critical foundation for school algebra in Japanese elementary school mathematics. In G, Kaiser., & B, Sriraman (Eds), *Early algebraization* (pp. 109-124). Springer, Berlin, Heidelberg.