



DESARROLLO DE LA CONCEPCIÓN DE EXTENDER PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL TRIÁNGULO AL TETRAEDRO CON PROFESORES EN FORMACIÓN PARA SECUNDARIA

García Castrejón Gerardo Gabriel
Universidad Autónoma de Guerrero
gabrielgarcas@uagro.mx
Marmolejo Vega José Efrén
Universidad Autónoma de Guerrero
efrenmarmolejo@uagrovirtual.mx
Marmolejo Valle José Efrén
Universidad Autónoma de Guerrero
jmarmolejov@uagrovirtual.mx

Área temática: A.6) Educación en campos disciplinares.
Línea temática: Educación Matemática.
Tipo de ponencia: Reporte parciales o final de investigación



Resumen

La propuesta de este trabajo de investigación es responder a la pregunta: ¿cómo lograr extender las propiedades del plano al espacio con profesores en formación inicial?. Encontramos que en la enseñanza de la matemática tradicionalmente se realiza por separado la geometría del plano y la geometría del espacio, dado esto proponemos una articulación entre ambas a través de la argumentación, vía la conjuración y posteriormente la deducción formal para el diseño de una actividad mediada de enseñanza-aprendizaje. Analizamos las rectas notables del triángulo para conocer cuáles si se conservan esas propiedades en el tetraedro y sustentamos matemáticamente la concurrencia de las rectas notables excepto para las alturas. Nos enfocamos en que los futuros profesores de matemáticas de secundaria descubran la conjetura: “el punto de intersección de las mediatrices espaciales de las caras del tetraedro, y analizar la evolución de sus argumentos.

Palabras clave: docentes en formación, argumentar, conjeturar, demostrar, propiedades geométricas.

Introducción

Rara vez los profesores en formación estudian la extensión de propiedades geométricas del plano al espacio, a través de la argumentación y el debate. Para contribuir a resolver esta situación

proponemos el diseño de una secuencia de aprendizaje, donde se extiende la propiedad del “circuncentro de las mediatrices en un triángulo” a su correspondiente en el tetraedro, bajo la unidad cognitiva argumentar-conjeturar-demostrar, considerando los momentos didácticos: i) apelando a la intuición; ii) hacia la visualización dinámica y iii) formalización y generalización. La implementación se llevará a cabo con un grupo de 15 de estudiantes cuarto semestre de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria del Plan de Estudios 2018, de la Dirección General de Educación Superior para el Magisterio (DGESuM). Se espera favorecer el pensamiento matemático, la abstracción y la comunicación de ideas en el camino de argumentar a demostrar la importancia de estudiar la idea de extender el concepto de mediatriz del plano al espacio y en general sean capaces de analizar la posible extensión de cualquier propiedad.

La actividad profesional de formar a profesores de acuerdo con Laffitte (1991) se entiende como un proceso planificado, de crecimiento y mejora en relación con el crecimiento del futuro docente, con las actitudes hacia su trabajo, con la institución y que busca la interrelación entre las necesidades de desarrollo personal del maestro y las de desarrollo institucional y social. Consecuentemente, el desarrollo profesional debe incidir no sólo en el desarrollo personal del docente, sino también en el desarrollo de la organización y pretende fomentar una cultura de colaboración entre profesores, lo que lleva a la adquisición de nuevas prácticas y enfoques de enseñanza.

Entre los factores fundamentales que influyen en la calidad de la educación secundaria, se encuentra la formación del profesorado. Como afirma Laurer (2001), el desarrollo profesional de los docentes es uno de los factores más importantes en el aprendizaje de los estudiantes. El desarrollo profesional es la construcción de la identidad profesional, que pretende el aumento de la satisfacción en el ejercicio de la profesión por medio de una mayor comprensión y mejora de las competencias profesionales.

El posicionamiento que tiene Esteve (2009) respecto a la estrategia de formar profesores que se especializan en la enseñanza de una disciplina o área de conocimiento, donde primero se dota de una formación académica sobre los contenidos científicos que se van a transmitir y posteriormente se emprende la tarea de dar una formación profesional sobre los conocimientos pedagógicos, psicológicos, de destrezas sociales y comunicativas que se necesitan para enseñar esos contenidos en las aulas, con la que no está de acuerdo, sino con el modelo simultáneo en el que al mismo tiempo, el futuro profesor estudia los contenidos científicos y recibe la formación específica necesaria para comunicarlos en las aulas.

Sobre la formación de profesores de matemáticas, asumimos lo dicho por Dolores, García, Hernández y Sosa (2013), en coincidencia con Esteve al plantear la necesidad de contar con una perspectiva más amplia e integral, proponiendo que la formación del profesor de matemáticas se articula sobre la base de tres áreas fundamentales: formación matemática, formación pedagógica y formación docente. Según este autor, el profesor de matemáticas necesita de una formación profesional que le permita “desarrollar competencias para propiciar o producir

el aprendizaje de las matemáticas. Para que esto sea posible es necesario dominar el saber matemático, conocer cómo aprenden los estudiantes y, sobre estas bases, poder utilizar o diseñar métodos, procedimientos y medios didácticos que posibiliten el aprendizaje” (Dolores, et al, 2014).

En tanto, Ávalos (1996) afirma que es posible transformar las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en cursos de actualización docente, cuando se propician situaciones de validación y de institucionalización al abrir espacios de confrontación en grupo para analizar problemas, siendo una motivación el éxito obtenido por incorporar los nuevos conocimientos en más situaciones problemáticas. Así pues, los argumentos dados sobre la validez de una conjetura, movilizan los conocimientos personales y conocimientos compartidos que generan la necesidad de una prueba como parte de las interacciones y por tanto abandono de la idea de memorización.

Godino (2008) afirma que las entidades matemáticas son creadas a partir de definiciones, en nuestro caso las de geometría no es la excepción, tenemos reglas que determinan la descripción de nuestro contexto habitual y otras descripciones de representaciones idílicas para comunicar la naturaleza de las propiedades a descubrir jugando con las reglas. Así el lenguaje geométrico extiende nuestra percepción de las formas a nuestro alrededor.

Por su parte, Miguel de Guzmán (2007) destaca los posibles objetivos de la enseñanza de la geometría, resumiendo: estimular la creatividad matemática mediante el experimento; ejercitar el pensamiento deductivo, la demostración; fomentar la capacidad de resolución de problemas; explorar los lazos con el resto de la actividad matemática; y fomentar el gusto y el sentido de la armonía y belleza de la matemática.

En López (2008) observamos lo importante que es para el profesorado tener desarrollado un pensamiento geométrico:

“Es importante reflexionar sobre las razones para enseñar geometría. Si el maestro tiene claro el porqué, estará en condiciones de tomar decisiones más acertadas acerca de su enseñanza. Una primera razón para dar esta unidad de aprendizaje la encontramos en nuestro entorno inmediato, basta con mirarlo y descubrir que en él se encuentran muchas relaciones y conceptos geométricos: la geometría modela el espacio que percibimos, es decir, la geometría es la Matemática del espacio” (López, O. 2008, p. 27).

Por lo que también López (2008) reconoce los siguientes aspectos desarrollados al estudiar geometría:

La Geometría trabaja con objetos ideales que se pueden manipular mentalmente, que no dependen de lo que perciben nuestros sentidos. Estudiar Geometría ofrece la oportunidad de conocer a la primera ciencia en la que, a partir de unas cuantas definiciones y postulados considerados verdaderos, se construye un sólido edificio de afirmaciones cuya veracidad puede demostrarse (López, 2008, p. 23).

Nikolina Kovačević (2017) menciona que existe un diálogo entre investigadores, profesores y educadores sobre qué es el razonamiento espacial en matemáticas y cuáles son las habilidades espaciales que van más allá de la educación escolar como apoyo al aprendizaje. Define que el razonamiento espacial puede describirse como el proceso de formar ideas a través de relaciones espaciales entre objetos.

La enseñanza de la geometría clásicamente se ha realizado en la escuela básica y obligatoria con un énfasis de aprender las propiedades geométricas en el plano y difícilmente se pueden encontrar programas de estudio que incorporen elementos de la geometría del espacio. En mi caso particular, considero importante que los profesores en formación puedan trascender esta limitante al trabajar la geometría del plano al espacio, para fortalecer la experiencia de enseñanza y aprendizaje haciéndole más dinámica, donde la tecnología permita la observación, la argumentación y el debate de forma más viva, sobre todo ahora que contamos con instrumentales de geometría dinámica y otros recursos que permiten hacer una mejor visualización de la geometría en el espacio. Con lo anterior expuesto, se torna fundamental para desarrollar esta investigación responder: ¿Cómo evoluciona la fortaleza de los argumentos empleados por los futuros profesores de matemáticas en la conceptualización de extender las propiedades de las rectas notables del triángulo al tetraedro?

Desarrollo

Por siglos, la geometría se ha concebido como la ciencia que modela el espacio físico en que vivimos, toda vez que percibimos la realidad en formas y cuerpos geométricos, líneas rectas, ángulos, diversos polígonos, paralelepípedos, etc., se configuran en relaciones espaciales que abstraídas dan cuerpo al sistema geométrico, que potencian las formas de pensamiento y razonamiento matemático, contribuyendo con ello a que los individuos tengan una mejor comprensión del mundo en que viven.

La importancia de la enseñanza de la geometría ha sido por siglos también una constante en la educación básica y preuniversitaria, aunque se enfatiza principalmente en las relaciones geométricas de las figuras en el plano y en menor medida en el comportamiento geométrico espacial, variando en su didáctica, según las concepciones que sobre la matemática y específicamente sobre geometría se tenga. El reducir el estudio del espacio geométrico a tan solo la descripción de las formas espaciales de cuerpos, de los que interesa medir y calcular volúmenes, le asumo como un problema de la enseñanza de la geometría en la formación de profesores de matemáticas, quienes habrán de ser los responsables de la enseñanza de la geometría en los niveles educativos básico y medio superior.

Sin el conocimiento de propiedades geométricas básicas de los sólidos y su representación espacial, limitará la concepción que sobre la geometría se forme el futuro maestro. En la tesis doctoral de Mayra Solana (Solana, 1991) se establece el isomorfismo posible entre las propiedades

del triángulo (figura plana) y las que con él se corresponden en el tetraedro (cuerpo espacial), específicamente las referidas a las líneas notables del triángulo, se nota que es factible hacer corresponder especialmente las propiedades aunque no todas, partiendo de definir tales propiedades del plano, ahora en la referencia tridimensional, y proceder a su demostración, construyendo así la geometría del espacio, la que sigue su desarrollo ampliando las teorías propias.

La no enseñanza de los elementos de geometría del espacio son consecuencia de que los alumnos incluso los ingresantes a carreras de ciencias o ingenierías muestran muy pocos conocimientos de los elementos espaciales, tanto más, poco o nula capacidad de representación mental y gráfica de situaciones en el espacio.

De aquí la pertinencia de trabajar la temática y diseñar una secuencia didáctica orientada a mostrar de manera inicial (dado el espacio y contenido de esta tesis de maestría), la forma metodológica de presentar la extensión de propiedades geométricas del plano euclidiano al espacio. En este trabajo nos limitamos a explorar las propiedades de las rectas notables del triángulo y su posible extensión como propiedades del tetraedro, como figura y cuerpo básico de la geometría. Esto es, mostraremos la relación existente entre el plano y el espacio, mediante la presentación de la analogía entre las propiedades del triángulo y el tetraedro; pretendemos con ello contribuir al desarrollo de la imaginación espacial en los docentes en formación mediante la adquisición de habilidades en las representaciones geométricas y sus correspondientes propiedades.

De tal forma que se hace necesario un estudio previo desde la teoría matemática de las propiedades geométricas (rectas notables) del triángulo factibles de extenderse al tetraedro, identificando las analogías y diferencias.

Asumimos como ya establecidos en Wentworth y Smith (2006) los elementos conceptuales fundamentales tanto del triángulo como del tetraedro.

En el triángulo tenemos algunos elementos destacables como son: medianas, alturas, bisectrices, mediatrices, circunferencia inscrita y circunferencia circunscrita y puntos notables como son centro de gravedad, circuncentro, incentro, y ortocentro, entre otros centros del triángulo.

Tanto la comprensión de elementos y propiedades en el triángulo tendrán por analogía, los correspondientes conceptos y definiciones en el tetraedro. En el triángulo, la altura es el segmento que proyecta un vértice ortogonalmente sobre el lado opuesto. Para el tetraedro, la definición análoga es el segmento que proyecta ortogonalmente un vértice sobre la cara opuesta, nótese que en el triángulo las alturas son tres, en tanto que en el tetraedro son cuatro.

En el triángulo definimos a la mediana como el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto, en tanto que para el tetraedro, la mediana es el segmento que une un vértice en el centro de gravedad de la cara opuesta.

En el triángulo, definimos a la bisectriz como el segmento de recta que divide en dos ángulos iguales el ángulo generado por un vértice y los dos lados contiguos, o bien tal segmento es equidistante de los lados del triángulo en cualquiera de sus puntos. En tanto en el tetraedro, tal segmento de recta es equidistante en cualquiera de sus puntos de las tres caras del tetraedro que forma el ángulo triedro.

Definimos mediatriz del triángulo a la recta perpendicular por el punto medio de cada lado; en tanto lo que en el tetraedro, las mediatrices son las rectas perpendiculares a cada cara por los centros de las circunferencias circunscritas en los triángulos que limitan a cada cara del tetraedro. En cuanto a las propiedades de las principales rectas notables de las que se han mencionado, sus definiciones (alturas, medianas, bisectrices y mediatrices) destacan las referidas a su intersección, generando las propiedades:

En todo triángulo, las rectas notables (alturas, medianas, bisectrices y mediatrices) son concurrentes en un punto definido como: ortocentro para las alturas, incentro para las bisectrices, centro de gravedad para las medianas y circuncentro para las mediatrices. Estas propiedades que son generales para todo triángulo, resultan interesantes para hacerles corresponder con las que serían las análogas en el tetraedro, siguiendo de inmediato la pregunta ¿para todo tetraedro?. Hasta el momento se trabaja en la demostración formal para incorporar el contenido matemático en referencia y se modela con el software GeoGebra: <https://geogebra.org/classic/snw545yv>; <https://www.geogebra.org/classic/kunnuv8j>; <https://www.geogebra.org/classic/fdkpjptg>.

En mi experiencia como docente formador de docentes para secundaria, he constatado insuficiencias del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría del espacio en la carrera, al observar que los profesores en formación muestran: limitaciones en el poder de imaginación espacial; dificultades en la representación geométrica de cuerpos; dificultades en la resolución de problemas geométricos a partir del limitado desarrollo de la capacidad de visualización, lo que me motiva a indagar sobre la posible extensión de propiedades geométricas ampliamente conocidas cuando se refiere al plano y llevarles a sus correspondientes en cuerpos espaciales.

Objetivo general:

Diseñar una secuencia didáctica para el aprendizaje de la extensión de la propiedad del plano al espacio: el caso de las mediatrices del triángulo al tetraedro.

Objetivos específicos:

1. Analizar matemáticamente la factibilidad de extensión de propiedades geométricas de plano al espacio en el caso de las rectas notables del triángulo y sustentar bajo qué condiciones se valida formalmente para todo tetraedro.

2. Diseñar y aplicar un tratamiento metodológico que permita en primer momento conjeturar la extensión de la propiedad de la intersección de las mediatrices del triángulo al tetraedro y en segundo momento la deducción formal.
3. Caracterizar la evolución de los argumentos empleados por los profesores en formación durante el proceso de conjeturación y deducción.

Asumimos la propuesta teórica de Marmolejo y Moreno (2019) en referencia a construir propiedades en el contexto escolar es la producción de actividades orientadas de la intuición a la formalización, enfatizando la formación de conjeturas, propiedades que siendo ciertas en la matemática, son nuevas para el estudiante y se validan plausiblemente. Asimismo, tomaremos como referente lo postulado por Marmolejo y Moreno (2018), donde destacan la tesis: La Unidad Cognitiva Argumentar–Conjeturar–Demostrar, sobre la importancia de elaborar propiedades matemáticas vía la conjeturación, la cual será el recurso que usaremos en la secuencia didáctica del proyecto, formulando primero propiedades en el plano y luego su extensión al espacio.

Propuesta de la secuencia didáctica

Momento didáctico: “Apelando la intuición y la observación”

Intención didáctica: Mediante construcciones geométricas con regla y compás, los docentes en formación arribarán a las conjeturas de lo que usualmente se conoce por mediatriz y circuncentro del triángulo: **“recta perpendicular al segmento que contiene su punto medio”** y **“la mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos que equidistan a los extremos del segmento”**; **“las mediatrices del triángulo concurren en un punto que equidista a los extremos de los vértices y es el centro de la circunferencia circunscrita”**.

Recursos didácticos: Hojas blancas tamaño carta, regla, compás, lápiz, sacapuntas, borrador, mesa de trabajo plana, grabación de audio.

Actividad:1

Dado un segmento construir la mediatriz con regla y compás. (alternativamente se espera que los participantes realicen dobleces con el papel o recortes)

¿Qué ángulo forman la mediatriz con el segmento?

¿Es perpendicular al segmento en algún punto especial?

¿Qué puedes decir de la distancia de un punto cualquiera de la mediatriz a los extremos del segmento?

¿La mediatriz para el mismo segmento será única o existirá otra?

¿Cómo enunciarías las características encontradas de la mediatriz?

En binas:

Construyan un triángulo arbitrario con tres puntos no colineales (llamando a los puntos A, B, C) y tres rectas que unan los puntos AB, AC y BC.

¿Qué tipo triángulo por sus lados construyeron? (argumenten mediante la observación, pueden emplear compás)

Construyan las mediatrices a los lados del triángulo.

¿Qué regularidad observan al haber construido las mediatrices de los lados del triángulo?

¿Esa regularidad la observan todos, en independencia del tipo de triángulo que construyeron?

Enuncien la regularidad observada.

Si están de acuerdo en que las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes,

¿Qué relación tiene este punto de concurrencia con los vértices del triángulo?

¿Cuál es la razón de ello?

¿Podría haber otro punto de concurrencia de las mediatrices?

¿Con el punto de concurrencia de las mediatrices y la equidistancia de este a los vértices, qué figura se puede generar?

Entonces, formulen un enunciado que relacione las mediatrices de los lados del triángulo, su concurrencia y la circunferencia relacionada que ustedes construyeron.

“Las mediatrices de un triángulo concurren en un punto que equidista a los extremos de los vértices y es el centro de la circunferencia circunscrita”

Momento didáctico: “Visualización dinámica y generalización”

Intención didáctica: Mediante construcciones geométricas con GeoGebra y material concreto, los docentes en formación generalizaran la conjetura lograda en el momento didáctico “Apelando a la intuición”: **“las mediatrices de cualesquiera triángulo concurren en un punto que equidista a los extremos de los vértices y es el centro de la circunferencia circunscrita”** y exploran el desarrollo plano del tetraedro.

Recursos didácticos: Hojas blancas tamaño carta, regla, compás, lápiz, sacapuntas, borrador, mesa de trabajo plana, grabación de audio, equipo informático, GeoGebra Online/Escritorio.

Actividad:2

Estas relaciones que se encontraron, ¿se conservan para todo triángulo?.

Hagamos la representación en GeoGebra.

¿Qué sucede cuando movemos alguno de los vértices?

¿La propiedad de concurrencia de las mediatrices del triángulo se conserva o cambia? Demos movilidad para representar cualesquiera otro triángulo.

¿Son invariantes tales relaciones?/¿Las relaciones que observaron en sus triángulos particulares se conservan en esta representación de GeoGebra?

¿Cómo enunciamos o escribimos estas relaciones? ¿Se cumple para todo triángulo?

Pasemos al espacio...

¿Cuál sería en el espacio el cuerpo equivalente a un triángulo? Inicia el debate.

Los futuros docentes dirán que una pirámide o un tetraedro, a lo cual se les preguntará: ¿por qué una pirámide o un tetraedro? Si no hay respuesta, preguntamos: ¿Puede ser una pirámide o un tetraedro? Se prevé que los futuros profesores realizaran dibujos tridimensionales representados en el plano o buscaran material concreto para hacer referencia a los cuerpos en discusión y definir los criterios empleados para argumentar su propuesta.

Analícemos, ¿Cuáles son las características geométricas y cómo se clasifica un tetraedro? Mostrar los modelos de popotes, varillas y otros materiales para que los estudiantes recuperen los componentes/elementos básicos: ángulos (plano y diedro), aristas, vértices, caras.

Inducir el desarrollo plano del tetraedro regular.

¿Si tuviéramos una hoja, una cartulina, un cartoncillo, palillos de madera, popotes, cómo se construye un tetraedro?

Qué otros recursos nos permitirían realizar la construcción del tetraedro?

Construyamos el tetraedro regular con material algunos de los materiales disponibles.

¿Cómo podríamos construir un tetraedro irregular?¿Habrá otro tipo de tetraedro que no sea como este regular?

¿Podríamos, como en el triángulo del plano, construir las mediatrices espaciales? de las caras del tetraedro?

¿Cómo ya saber dónde van las mediatrices?

¿Cómo se verían y dónde estarían ubicadas las mediatrices espaciales?

¿Será única la mediatriz espacial en cada cara?

¿Esa propiedad de concurrencia de las mediatrices que ustedes ubicaron en el plano, cómo se vería en el espacio?

Para cada una de las caras, levanta sobre el circuncentro una recta perpendicular al plano.

¿Qué se observa de estas mediatrices espaciales?

¿Serán concurrentes?

En la geometría del plano, las mediatrices conocemos que las mediatrices equidistan de ciertos puntos. ¿En la geometría del espacio esta propiedad de ser equidistante se pierde? ¿De quién equidista?

¿Cuál será un nombre adecuado para este punto?

¿Cómo podríamos expresar esta propiedad en el espacio? mediatriz espacial.

¿Ese centro de concurrencia era el centro de este punto de concurrencia que genera?.

Trabajar la construcción con el modelo de las varillas y popotes.

¿La propiedad generalizada es para todo el tetraedro? La construcción del tetraedro regular con material concreto (varillas). ¿Hay más tetraedros no regulares?.

¿Cómo se puede pasar de un tetraedro equilátero a un tetraedro irregular?.

Las relaciones observadas cambian o son invariantes? Enuncia la propiedad que resulta de las relaciones de las mediatrices espaciales, punto de concurrencia y esfera.

Conclusiones

Hasta el momento no se cuenta con conclusiones, puesto que se trabaja sobre la formalización del contenido a la par que de la secuencia didáctica. Observamos que la contribución podría alcanzar a que los futuros docentes de matemáticas logren realizar la demostración formal sobre la extensión de la mediatriz del triángulo al espacio.

Referencias

- Ávalos, A. (1996). *Estudio de las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización*. (Tesis de maestría). CINVESTAV-IPN. México.
- Dolores, C. (2013). La formación profesional del profesor de matemáticas. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores*.
- Esteve Zaragoza, J. M. (2009) La formación de profesores: bases teóricas para el desarrollo de programas de formación inicial. *Revista Educación*.
- Godino, J. (2003) *Geometría y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
- Guzmán, M. (SF) El aprendizaje de la Geometría hoy. (s. f.). <http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/05edumat/geometriahoy/geometriahoy.html>
- Kovačević, N. (2017). Mathematics education as a science and a profession. Spatial reasoning in mathematics. University of Osijek.
- Laffitte, R. (1991) Evaluación y desarrollo profesional del profesorado universitario: dos facetas de la mejora institucional. III Jornadas de Didáctica Universitaria. Las Palmas de la Gran Canaria

Laurer, P. A. (2001) Characteristics of teacher Professional Development in HighPerforming High-Need Schools. Michigan State: University College of Education. Disponible en: <http://edtech.connect.msu.edu/Searchaera2002/viuwproposaltext.asp?propID=5653>.

López. Olga L. E. (2008) La enseñanza de la geometría. ISBN: 978-968-5924-35-1

Marmolejo, E. , Moreno, G. (2018). En Acercamiento a la Ciencia. México. UAGro.

Marmolejo, E., Moreno, G. (2019). La Demostración Matemática en el Contexto Escolar. México, UAGro.

SEP. (2018). Plan de estudios 2018, Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. México. Secretaría de Educación Pública.

Solana, M. (1991). Geometría del Tetraedro: Una metodología para su enseñanza y aprendizaje. Tesis doctoral. Habana Cuba.

Wentworth, G., Smith, D. (2006). Plane and Solid Geometry. University of Michigan Library.