Exploración sobre la pedagogía de la variación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en modalidad remota: el caso de la resolución general de ecuaciones Diofánticas lineales

David Silva Bautista
Claustro Universitario de Oriente
david@cudeoriente.edu.mx
Verónica Hoyos Aguilar
Universidad Pedagógica Nacional
vhoyosa@upn.mx

Área temática: Educación en campos disciplinares
Línea temática: Educación Matemática
Tipo de ponencia: Reporte final de investigación

Resumen

Presentamos resultados de una exploración en torno del desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes del bachillerato mediante la resolución de problemas de ecuaciones Diofánticas lineales y la argumentación de soluciones con métodos numéricos y gráficos. Los datos se obtuvieron de observaciones empíricas y un análisis cualitativo-descriptivo de lo elaborado por un grupo de estudiantes del bachillerato durante la resolución de tareas matemáticas específicas. Se implementó una estrategia pedagógica de variación en el diseño de las tareas para que los estudiantes pudieran discernir patrones de variación, y así focalizar su atención en los aspectos y características críticas de las ecuaciones a resolver. Entre los resultados destacó la posibilidad de que los estudiantes utilizaran la divisibilidad y el algoritmo de Euclides en la argumentación de sus soluciones. Finalmente, en las conclusiones se reconoce la importancia del diseño especializado de tareas matemáticas para lograr una práctica docente efectiva y valorar la planeación de aprendizajes previstos.

Palabras clave: Diseño de tareas matemáticas, Pedagogía de la variación, Resolución de ecuaciones Diofánticas lineales, Desarrollo de pensamiento matemático.

Introducción

Uno de los retos de la educación matemática es el diseño e implementación de una enseñanza efectiva que promueva habilidades diversas y a diferentes ritmos para que los estudiantes aprendan conceptos matemáticos con comprensión y adquieran motivación positiva e interés hacia la materia. Sin embargo, resultados de estudios nacionales e internacionales indican que los estudiantes alcanzan un dominio incompleto y deficiente de los principales conceptos matemáticos, y que son incapaces de aplicar conocimientos previos relevantes (Lim, 2010; Nadirah, Yusof, Siti Fatimah, Rahimah y Ezrinda, 2012). También se reportan hallazgos similares en diversos países, como Finlandia, Suecia y Sudáfrica (Tossavainen, Attorps y Väisänen, 2011), en particular sobre dificultades similares de los estudiantes esta vez para comprender el concepto estructural de ecuación, igualdad y función.

En México, en diversas instituciones escolares, como las Escuelas Prepararatorias Oficiales (EPO), incluso la directiva escolar ha instado a los maestros del sistema educativo EPO a cambiar su enfoque de enseñanza, lo que oficialmente aparece en los planes y programas de estudio para la educación básica vigentes (SEP, 2017). La necesidad de cambios de enseñanza y aprendizaje también se refleja en reportes de estudios locales (Rojano y Solares, 2017) que informan que los enfoques de enseñanza más comúnmente adoptados por los maestros de matemáticas continúan siendo exposiciones y ejercicios en clase. Finalmente, en los resultados en matemáticas de la prueba del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (*Planea* 2017) con estudiantes mexicanos en nivel bachillerato, se destaca lo siguiente:

> En Matemáticas, 6 de cada 10 estudiantes se ubica en el nivel I (66 %); casi 2 de cada 10 se ubican en el nivel II (23%); en el nivel III, sólo 8 de cada 100 estudiantes (8%); en el nivel IV, casi 3 estudiantes de cada 100 (2.5%).

Así, la mayoría de estudiantes en bachillerato evaluados con la prueba *Planea* presentan deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas, en particular en álgebra y en la resolución de problemas que requieren el uso de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, lo que incluye también a las ecuaciones diofánticas lineales (EDL), que son del tipo ax+by=c con a, b y c números enteros, y cuyas soluciones son también números enteros. Sin embargo, en países asiáticos se reporta que la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones utilizando una estrategia pedagógica de variación ha resultado exitosa (Lai & Murray, 2012; Huang & Li, 2017). Son pocos los indicios de estas prácticas en occidente (Sun, 2011b), y particularmente en América Latina y México son escasos los trabajos que se conocen al respecto (Ascencio G. R., & Eccius-Wellmann, C., 2019, Ramírez, L. 2018).

Por último, en el perfil de egreso de los planes y programas de estudio del bachillerato general en México (SEP, 2017) se establece que en el ámbito del pensamiento matemático y al término de la educación media superior, "se formularán y resolverán problemas, aplicando diferentes enfoques, argumentando la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos" (pp. 25 y 197).

En la indagación que aquí se presenta se buscó desarrollar el pensamiento matemático de estudiantes del bachillerato mediante la resolución de problemas de ecuaciones Diofánticas y la argumentación de soluciones con métodos numéricos y gráficos.

El objetivo fue aplicar la teoría de la variación al diseño e implementación de tareas matemáticas para promover en los estudiantes la focalización de aspectos y características críticas de un objeto de aprendizaje (específicamente las ecuaciones diofánticas lineales), y conocer su incidencia en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Esto, aunado a que la implementación de la estrategia se realizó en modalidad remota por la pandemia COVID-19, hizo que nuestra pregunta de investigación fuera: ¿cómo incide en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes del sistema EPO la resolución de tareas diseñadas en acuerdo con la pedagogía de la variación? Tareas en particular sobre ecuaciones Diofánticas lineales.

La hipótesis de investigación fue que un diseño de tareas acorde a la pedagogía de la variación apoyaría el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos del bachillerato general EPO, les ofrecería la oportunidad de experimentar matemáticas desafiantes y promovería la capacidad de los estudiantes de aprendizajes graduales y reflexión sobre los mismos.

Desarrollo

Desarrollo del pensamiento matemático

Existen definiciones variadas sobre pensamiento matemático en la literatura de investigación sobre el tema, pero casi todas se basan en la resolución de problemas de matemáticas. En el perfil de egreso de los planes y programas de estudio del bachillerato general en México (SEP, 2017), se establece que en el ámbito del pensamiento matemático y al término de la educación media superior, "se formularán y resolverán problemas, aplicando diferentes enfoques, argumentando la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos" (pp. 25 y 197). Esto es, uno de los objetivos de la educación media superior (SEP, 2017) es el desarrollo del pensamiento matemático, y éste en parte se caracteriza por la resolución de problemas aplicando diferentes enfoques, y por la argumentación de la solución obtenida con métodos numéricos, gráficos o analíticos.

Diseño de Tareas Matemáticas según la pedagogía de la variación

Marton y Booth (1997) consideran que adquirir un conocimiento es encontrar nuevas formas de vivir una experiencia relacionada con ese conocimiento. Destacan que una persona ha aprendido un concepto o un proceso cuando es capaz de enfocar aquellos aspectos que le son esenciales, dentro de un contexto dado y de forma simultánea y consciente. Mencionan que el aprendizaje es una función del discernimiento, entendido como distinguir mediante el intelecto una cosa de otra o varias cosas entre sí, a través de la observación de lo que varía entre ellas.

Según Marton (2015), el enfoque pedagógico de la variación define como punto de partida un objeto de aprendizaje y destaca condiciones necesarias relacionadas con el tratamiento de ese objeto de aprendizaje. Lo (2012) indica que para ver un objeto de una manera particular, debemos enfocarnos en ciertos elementos que son críticos para una determinada forma de ver. Estos elementos son conocidos como "aspectos y características críticas".

Marton (2015) señala que el estudiante debe aprender a discernir aspectos y características críticas del objeto de aprendizaje simultáneamente, para aumentar la probabilidad de discernir las mismas u otras características críticas en tareas de aprendizaje novedosas. El maestro, como orquestador de tareas en la clase debe saber cuáles son los aspectos y características críticas del objeto de aprendizaje. Sin embargo, aspectos y características críticas pueden ser difíciles de descubrir. Lo (2012) señala que los estudiantes no pueden discernir de forma natural los aspectos críticos, requieren que el profesor les provea de oportunidades para hacerlo, mediante la elección y organización del contenido adecuado para ello.

Leung (2012, p.436) propuso como extensión de la pedagogía de la variación de Marton la idea de una unidad de discernimiento como la unidad de un proceso pedagógico impulsado por los patrones de variación Contraste, Separación, Generalización y Fusión provocados en una experiencia de variación. La conjetura básica de la variación (Marton 2015, p. 50) es que apropiarse de un nuevo significado (es decir, aprender a discernir un nuevo aspecto o una nueva característica) está en función de experimentar dicha serie de patrones de variación e invariancia. Así, en un inicio la investigación se enfocó en la elaboración, diseño y análisis de un conjunto de tareas matemáticas de aprendizaje que requerían agrupar aspectos críticos (dimensiones de variación) del objeto de apendizaje que, a su vez, tomarían valores (no necesariamente numéricos) que varíarían, llamados características críticas.

A continuación, en la Figura 1, se presenta un bosquejo general de la determinación de los aspectos y características criticas, contrastes y patrones de variación e invariación que se consideraron necesarios para tematizar la resolución de las EDL con dos incógnitas, en acuerdo con la pedagogía de la variación de Marton (2015). También se muestran algunas dimensiones de variación conceptual y procedimental que se abren dentro del objeto de aprendizaje previsto. De igual manera, en la Figura 2 se presentan las cinco unidades de discernimiento que se consideraron en esta indagación, apoyándonos en la extensión de la pedagogía de la variación hecha por Leung (2012).

Figura 1. Representación de los aspectos y características críticas del objeto de aprendizaje

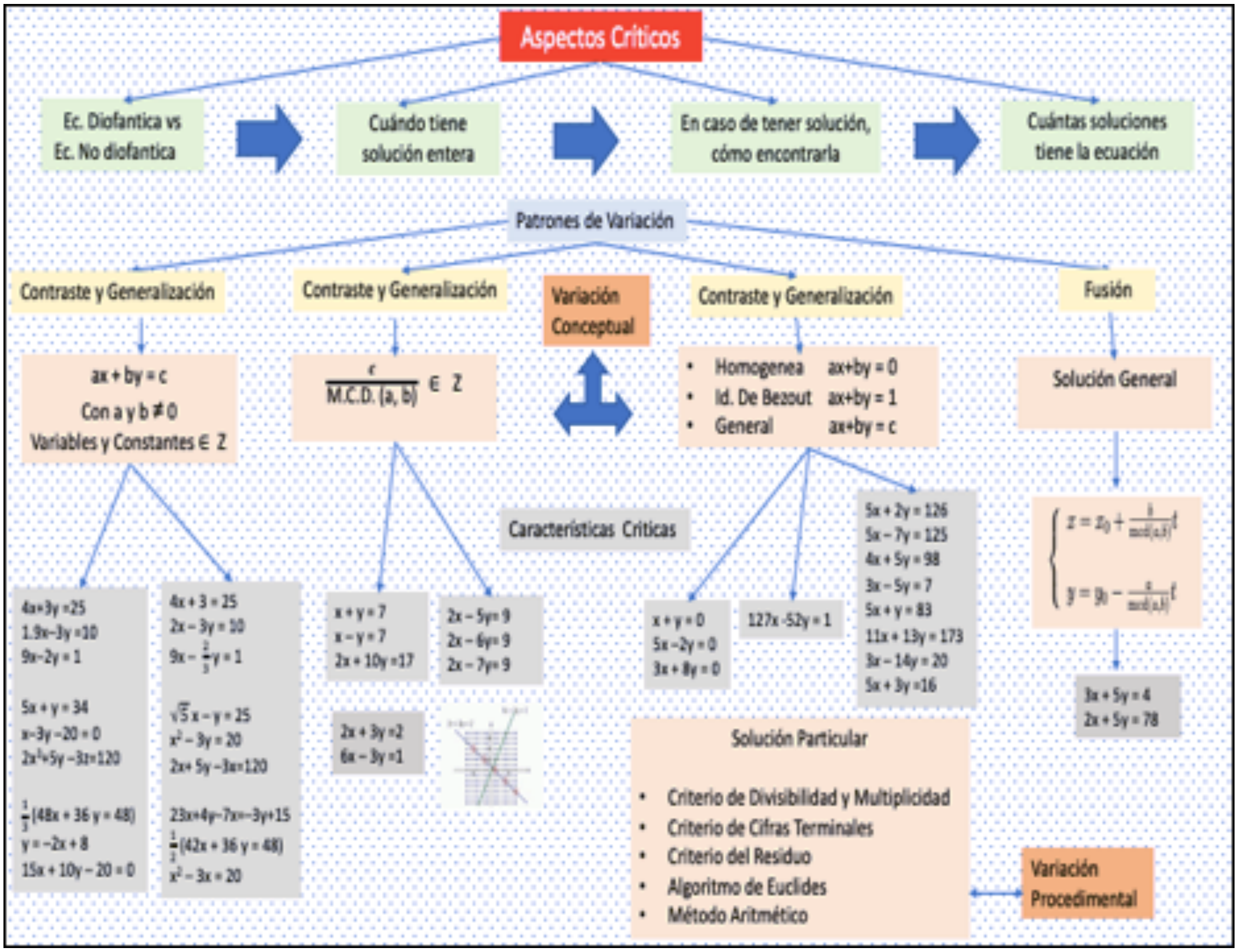
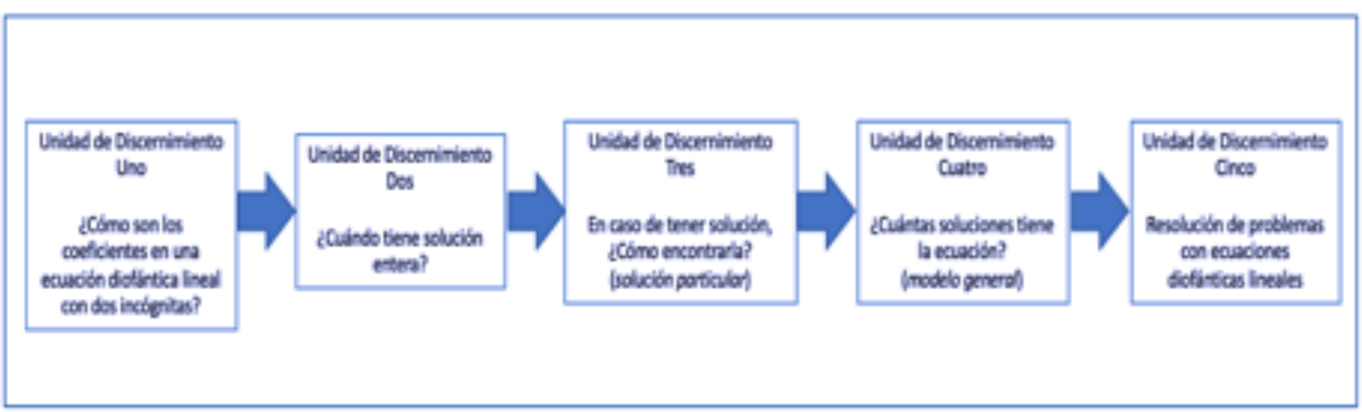


Figura 2. Unidades de discernimiento



Implementación de las tareas y recolección de datos

En un segundo momento el trabajo se concentró en la implementación del conjunto de tareas diseñadas con un grupo de 35 estudiantes del segundo semestre del bachillerato (de entre 15 y 17 años) de la Escuela Preparatoria Oficial (EPO 171), ubicada en la zona oriente del Estado de México. Se agrupó a los estudiantes en parejas, y como esta exploración tuvo lugar de febrero a julio del 2020 (durante la pandemia del COVID-19), algunas de las actividades con los estudiantes fueron realizadas por medios informáticos de manera asincrónica (se les enviaron las tareas a sus correos electrónicos personales). Otras tareas se realizaron de manera presencial, en las instalaciones de la escuela, y unas más fueron elaboradas en sus domicilios.

En contraste con el acercamiento escolar tradicional a la resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, en el trabajo que aquí se presenta abordamos el problema de que los estudiantes encontraran una primera solución entera llamada *solución particular*. Enseguida debían encontrar otras soluciones enteras, y finalmente deberían llegar a un *modelo o forma general* para todas las soluciones en números enteros. La idea de la dinámica de trabajo a seguir con base en la pedagogía de la variación, fue dejar a los jóvenes estudiantes experimentar, y descubrir por ellos mismos la(s) solución(es), ver qué encontraban de interesante en las tareas que se les proponian mientras se trataba, tanto como fuera posible, de que expresaran lo que aprendían y/o discernían de dichas tareas, con una intervención minima o nula de parte del docente. Esto último pudo mantenerse principalmente por la adopción de una modalidad educativa remota debido al cierre de escuelas por la pandemia del COVID-19.

Colección de datos y resultados

De manera sintética, a continuación se presentan algunos de los resultados obtenidos, empezando por lo acontecido con la implementación de la primera unidad de discernimiento. Ahí se encontró que casi todos los estudiantes al inicio de la experimentación no le prestaron atención a la estructura de las ecuaciones y a las relaciones existentes entre los diferentes elementos que las conformaban, confundian los coeficientes con las incógnitas, e incluso tomaban a ambos como uno sólo (i.e., pensaban que eran lo mismo).

Diseño y resultados de la unidad de discernimiento uno

En el diseño de esta tarea se aplicaron los patrones de variación como son el contraste, la separación y la generalización de los coeficientes *a, b* y *c* (también con los exponentes de las incógnitas) para formular las ecuaciones. Las parejas de estudiantes denominadas E1, E4, E6, E7 y E8 resolvieron focalizando su atención en las variaciones realizadas en las características críticas mencionadas e identificaron a simple vista si se trataba o no de una ecuación de primer grado con dos incógnitas y con coeficientes enteros, en acuerdo con la tarea a resolver: ¿cómo son los coeficientes en una ecuación Diofántica lineal con dos incógnitas?

Tabla 1. Ecuaciones de la unidad de discernimiento uno

TAREAS	ECUACIONES PLANTEADAS		PROCEDIMIENTO
1	$4x + 3y = 25$	$4x + 3 = 25$	Reconocimiento de los coeficientes *a*, *b* y el término independiente *c*
	$1.9\,x - 2y = 10$	$2x - 2y = 10$	
	$9x - 2y = 1$	$9x - \frac{2}{3}y = 1$	
	$5x + y = 34$	$\sqrt{5}\,x - y = 25$	
	$x - 3y - 20 = 0$	$x^2 - 3y = 20$	
	$2x^3 + 5y - 3z = 120$	$2x + 5y - 3x = 120$	
	$\frac{1}{3}(48x + 36\,y = 48)$	$23x + 4y - 7x = -3y + 15$	
	$y = -2x + 8$	$\frac{1}{2}(42x + 36\,y = 48)$	
	$15x + 10y - 20 = 0$	$x^2 - 3x = 20$	

Por otro lado, los estudiantes realizaron manipulaciones algebraicas simples para obtener el formato estándar *ax+by=c*, y determinar si se trataba o no de una ecuación del tipo señalado, lo que los introdujo al fortalecimiento del sentido estructural de las ecuaciones.

Los equipos E2 y E5 presentaron muchas dificultades desde el inicio, igual para identificar la estructura de las ecuaciones y también para lograr realizar las manipulaciones algebraicas necesarias en la obtención del formato estándar. Fue claro que aún no tenían bases sólidas, ni aritméticas ni algebraicas.

Diseño y resultados de la unidad de discernimiento dos

Tabla 2. Ecuaciones de la unidad de discernimiento dos

TAREAS	ECUACIONES PLANTEADAS		PROCEDIMIENTO	CARACTERÍSTICA
2A	$x + y = 7$ $x - y = 7$ $2x + 10y = 17$	$2x - 5y = 9$ $2x - 6y = 9$ $2x - 7y = 9$	Tanteo	Si c/M.C.D de (a, b) $\in$ a Z Tiene sol. Entera
2B	$2x + 3y = 2$	$6x - 3y = 1$	Método gráfico	

En esta unidad la pregunta guía fue: ¿cuándo existe/tiene solución entera la ecuación dada? (M.C.D de a y b). Los estudiantes procedieron en primera instancia a buscar una solución por tanteo, encontrándo que no sólo se podía encontrar una solución entera única si no que también notaron que podían encontrar otras soluciones. La simplicidad de las dos primeras ecuaciones dadas en esta tarea les permitió dejar en segundo plano la estructura de las ecuaciones y los procedimientos algebraicos aprendidos en cursos anteriores (como la sustitución algebraica para obtener una solución). Sin embargo, no focalizaron su atención en la característica crítica de dividir el mcd (*a*, *b*) entre *c*, evidenciando marcas de la enseñanza convencional de sólo avocarse a resolver.

También se encontró que al variar la representación álgebraica por la gráfica los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 presentaron dificultades al localizar en la recta los puntos (x_o, y_o) para visualizar posibles soluciones enteras de la ecuación $6x-3y=1$. Intentaron nuevamente aplicar infructosamente el tanteo, y a pesar de muchos intentos no lograron encontrar soluciones. Esto los hizo retroceder y revisar, focalizando su atención en el papel del cociente mcd (*a*, *b*) entre *c*, lo que permite determinar si la ecuación tiene o no solución entera. En este caso, dicho cociente no da como resultado un número entero. Esto sentó un precedente matemático importante que sirve para determinar si las ecuaciones de este tipo tienen o no soluciones enteras.

Los equipos E2, E3 y E5 también se esforzaron en tratar de encontrar una solución por tanteo sin lograrlo. Dejaron en segundo plano la representación gráfica y el cociente mencionado. Según Panizza et al. (1999), cualquier trabajo alrededor de las representaciones gráficas de la recta no parece ser suficiente para que los alumnos establezcan una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente.

Diseño y resultados de la unidad de discernimiento tres

Tabla 3. Ecuaciones de la unidad de discernimiento tres

TAREAS	ECUACIONES PLANTEADAS		PROCEDIMIENTO
3A	$5x + 2y = 126$	$5x - 7y = 125$	Criterio de divisibilidad o multiplicidad
3B	$4x + 5y = 98$	$3x - 5y = 7$	Criterio de cifras términales
3C	$5x + y = 83$	$11x + 13y = 173$	Criterio de la división

Con respecto a esta unidad, la pregunta guía fue: En caso de tener solución, ¿cómo encontrarla? (Solución particular). Destaca la utilización del video tutorial como herramienta (ver https://youtube/jbH7fyqySqY) que sirve para continuar con trabajo empírico con los estudiantes pese a confinamiento sanitario, en este caso por el COVID-19. Con este material los estudiantes de los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 reforzaron su proceso de aprendizaje pues lograron mostrar de manera simple y desde la aritmética tres procedimientos matemáticos distintos (variación procedimental) para encontrar una solución particular de las ecuaciones dadas. Además, presentaron la regla aritmética (x_o+a) y (y_o+/- b) para encontrar otras soluciones enteras sin la necesidad de realizar manipulaciones algebraicas complicadas. Así, se abrió una nueva dimensión de variación. Con los equipos E2, E3 y E5 se evidenció su inclinación por buscar resolver las tareas de manera fácil y rápida. Esto los llevó a tratar de aplicar nuevamente el tanteo para encontrar las soluciones de las ecuaciones dadas, sin lograrlo. Estos estudiantes dejaron en segundo plano los procedimientos matemáticos en los videos tutoriales, que son aritméticos y no álgebraicos. Tampoco dieron importancia a diferentes representaciones utilizadas en la formulación de las tareas (como la gráfica).

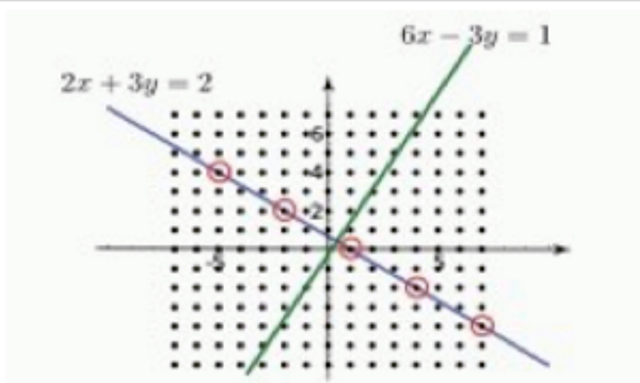
Por otro lado, interesa recalcar que en las resoluciones de los equipos E1, E4, E6, E7 y E8 empiezan a aparecer indicios de desarrollo de pensamiento matemático, como en esta unidad fue la utilización de diferentes procedimientos para alcanzar una solución.

Diseño y resultados de la unidad de discernimiento cuatro

Tabla 4. Ecuaciones de la unidad de discernimiento cuatro

<table>
<tr><th>TAREAS</th><th colspan="2">ECUACIONES PLANTEADAS</th><th>PROCEDIMIENTO</th></tr>
<tr><td>4A</td><td>MCD (525, 100)
MCD (66, 550)</td><td>127x – 52y = 1</td><td>Algoritmo de Euclides</td></tr>
<tr><td>4B</td><td colspan="2">3x+8y=0</td><td>Algoritmo de Euclides y método gráfico</td></tr>
</table>

Figura 3. Variación de lo símbolico a lo gráfico

<table>
<tr><td>2x + 3y =2</td><td>6x – 3y =1</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>2x + 3y =2
MCD (a, b) = 1
$\frac{2}{1} = 2$
Soluciones; Puntos en la recta (x_0, y_0)
((−5,4), (−2,2), (1,0), (4,−2), (7,−4)).</td><td>6x – 3y =1
MCD (a, b) = 2
$\frac{1}{2} = 0.5$
Sin soluciones; No hay puntos de intersección entera en la recta
(x_0, y_0)</td></tr>
</table>

En la unidad de discernimiento cuatro la pregunta guía fue: ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? (Modelo general). Entre los resultados más destacados en esta unidad, está que cuando la carga cognitiva de una tarea es demasiado pesada los estudiantes tienden a dividir su atención (*efecto de atención dividida*) y se centran en una sola forma de representación (Brünken y Leutner, 2001). En las tareas de esta unidad, el algotrimo de Euclides y la identidad de Bezout representaron una gran carga cognitiva para todos los estudiantes.

Figura 4. Ejemplo de los tres criterios aplicados para encontrar una solución particular

Criterio de Divisibilidad o Multiplicidad	Criterio de Cifras términales	Criterio de la División
$5x + 2y = 126$ 2 es multiplo o divisor de 126 5 no es multiplo o divisor de 126 Convertir 5y como multiplo o divisor de 126 $5(2) + 2(58) = 126$ $10 + 116 = 126$	$4x + 5y = 98$ $2\,[4x + 5y = 98]$ $8x + 10y = 196$ Cifras terminales de cada término ...6 ...0 ...6 $8(2) + 10\,(18) = 196$ $16 + 180 = 196$	$5x + y = 83$ D | d ; r → y, q → x 83 | 5 ; 3 → y, 16 → x $5(16) + (3) = 83$ $80 + 3 = 83$

En esta unidad (la cuatro) los equipos E3, E4, E6 y E7 tuvieron dificultades para discernir el algoritmo de Euclides, pero finalmente lograron encontrar una solución particular para la ecuación dada, del tipo $ax+by=1$. También fue difícil aplicar la identidad de Bezout y encontrar la formula general para todas las soluciones enteras. En este caso, ya no optaron por aplicar el tanteo sino el método aritmético aprendido en las tareas anteriores encontrando otras soluciones enteras a las ecuaciones dadas.

En el caso de los equipos E2 y E5 la carga cognitiva de las tareas hizo que desistieran y dejaron inconclusas las hojas de trabajo. Finalmente sólo los equipos E1 y E8, quienes evidenciaron un buen desarrollo de su sentido estructural, lograron concretar de manera éxitosa las dos tareas de esta unidad de discernimiento, aplicaron correctamente el algoritmo de Euclides y la identidad de Bezout y encontraron la fórmula general para todas las soluciones enteras de las ecuaciones dadas. En la Figura 5 se muestra un ejemplo del trabajo de los estudiantes.

Desde nuestro punto de vista, la posibilidad de encontrar una fórmula general para las soluciones a partir de la utilización de procedimientos o argumentos matemáticos como son el algoritmo de Euclides o la identidad de Bezout es una de las principales evidencias del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes en los equipos E1 y E8.

Figura 5. Aplicación del algoritmo de Euclides y la identidad de Bezout por parte de los estudiantes

$$127x - 52y = 1$$

cocientes		2	2	3	1	5
dividendo	127	52	23	6	5	1
Residuo	23	6	5	1	0	

$$r = D - d*q$$

23= 127 – 2 (52)
6= 52 – 2 (23)
5= 23 – 3 (6)
1= 6 – 1 (5)
0= 5– 5 (1)

1= 6 – 1(5)
1= 6 – 1[23 - 3(6)]
1= 6 – 23 + 3 (6)
1= 4 (6) – 23
1= 4 [52- 2 (23)] –23
1= 4 (52)– 8 (23) –23
1= 4 (52)– 9 (23)
1= 4 (52)– 9 [127 - 2(52)
1= 4 (52)– 9 (127) + 18 (52)
1= 22 (52)– 9 (127)
1= 127(-9) + 52 (22)

x_0= -9 y_0= -22

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\operatorname{mcd}(a,b)}t \\ y = y_0 - \frac{a}{\operatorname{mcd}(a,b)}t \end{cases}$$

$x = -9 + \frac{(-52)}{1}t$ x= -9 - 52t

$y = -22 - \frac{(127)}{1}t$ y= -22 - 127t

Diseño y resultados de la unidad de discernimiento cinco

Esta unidad refiere a la resolución de problemas que se modelan por una ecuación Diofántica lineal. Los problemas en la tarea aparecen en la Tabla 5.

La implementación de la quinta unidad de discernimiento permitió que los estudiantes E1, E4, E6, E7 y E8 fortalecieran el proceso de exploración en la resolución de problemas con ecuaciones, y lograran aplicar los conocimientos y procedimientos matemáticos adquiridos a lo largo de las tareas anteriores.

Tabla 5. Problemas de aplicación que se resuelven con una ecuacion Diofántica lineal

TAREAS	PROBLEMAS PLANTEADOS	PROCEDIMIENTO
Una garrafa de 5 litros y otra de 3 litros de capacidad. ¿Cómo podemos utilizar las medidas exactas de estas garrafas para conseguir una tercera garrafa de 4 litos de manera exacta?		Cualquiera de los utilizados en las tareas anteriores
5A	$3x + 5y = 4$	
Aldo ingresa a una papelería para comprar lápices de 2 pesos y correctores de 5 pesos; él dispone de 78 pesos para realizar dicha compra. Indique el número de formas que Aldo puede comprar, gastando todo el dinero que tiene, si debe comprar al menos un artículo de cada tipo.		
5B	$2x + 5y = 78$	

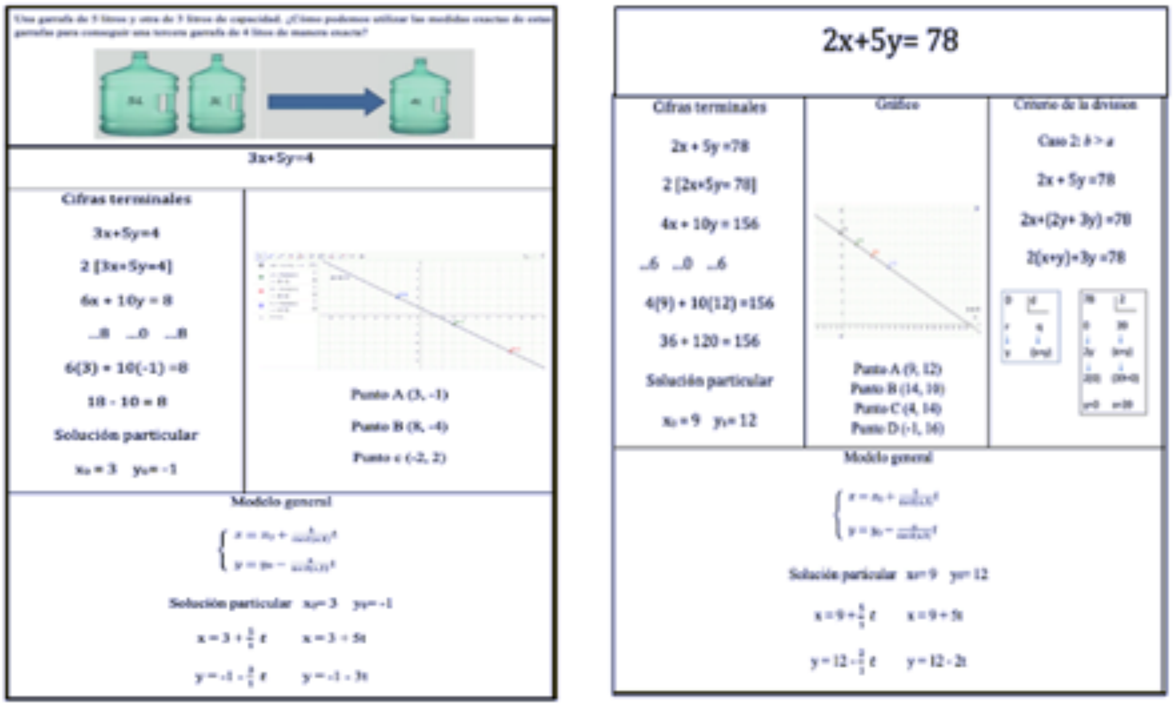
La secuenciación de las tareas con base en la pedagogía de la variación ilustró dos formas de variación, a saber, variación conceptual y variación procedimental que refieren a la comprensión de conceptos desde múltiples perspectivas y al posterior despliegue gradual de procedimientos matemáticos. Ambas formas de variación refieren al desarrollo de pensamiento matemático, como antes recalcamos en relación con la unidad de discernimiento tres y cuatro.

Finalmente, en los equipos E2 y E5, la construcción de ecuaciones a partir de problemas verbales, la interpretación, simplificación y resolución en números enteros de las ecuaciones Diofáticas lineales representaron temas difíciles de comprender y dificultades en el desarrollo del álgebra. Estos resultados muestran bajo desarrollo del sentido estructural al operar con expresiones algebraicas, particularmente sobre cómo y qué visualizar en las subestructuras que componen una expresión algebraica. Por otro lado, tal vez mayor interacción entre compañeros y la ayuda del maestro durante la experimentación podrían mejorar el aprendizaje. En la Figura 6 aparece el trabajo realizado por los estudiantes en esta unidad.

Conclusiones

La estrategia pedagógica de la variación aplicada al diseño de tareas matemáticas evidenció la posibilidad de que los estudiantes desarrollaran pensamiento matemático, en este caso por medio de la utilización de procedimientos distintos para encontrar una solución y por la utilización del algoritmo de Euclides y de la identidad de Bezout para encontrar una fórmula general para las soluciones. Además, en las resoluciones de los estudiantes en las unidades tres y cuatro es de notar que en la primera prevaleció lo aritmético antes que lo álgebraico y lo simbólico antes que lo gráfico.

Figura 6. Resolución de problemas con ecuaciones Diofánticas lineales



Esto se logró a partir del análisis de los efectos de las tareas matemáticas concretas, en términos de espacios de variación multidimensional y en conexión explícita con el conocimiento previo de los alumnos. En acuerdo con Mayer (1997) es posible que los estudiantes obtengan mejores resultados cuando aprenden con representaciones múltiples. Y en las resoluciones en la unidad de discernimiento cuatro, aunque el número de elementos, el contenido y las manipulaciones algebraicas generan diferentes cargas cognitivas en las tareas, lo que afecta a la focalización de los aspectos y características críticas del objeto de aprendizaje, dos equipos de estudiantes, E1 y E8, evidenciaron desarrollo de su sentido estructural y aplicaron correctamente el algoritmo de Euclides y la identidad de Bezout para encontrar la fórmula general de todas las soluciones enteras de las ecuaciones dadas, cuestiones que evidenciaron utilización de argumentos matemáticos para encontrar las soluciones.

Otro aspecto importante en el aprendizaje de los estudiantes, posible de observar por la suspensión de las clases durante la pandemia de COVID-19, es que desde nuestro punto de vista, para que los estudiantes logren discernir con éxito el objeto de aprendizaje, además de focalizar su atención en los aspectos y características críticas, también sería fundamental el aprendizaje en acción que denota lo que es posible aprender en una situación particular dentro del aula. Este tipo de aprendizaje refiere a un conjunto de experiencias que ofrece la interacción entre los diferentes actores en una situación didáctica. Aunque esto no se pudo corroborar en esta exploración, una hipótesis es que probablemente se obtendrían mejores resultados de aprendizaje con la realización de las experiencias matemáticas de los estudiantes en el aula.

Por último, destaca que el diseño de tareas matemáticas según la estrategia pedagógica de la variación aseguró emplear una estrategia de enseñanza eficaz, pues se centra en el objeto de aprendizaje seleccionado y en la focalización de sus aspectos críticos.

Referencias

Leung, A. (2012). Variation and mathematics pedagogy. In J. Dindyal, L.P. Cheng, & S.F. Ng (Eds.), *Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 433–440). MERGA.

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

INEE (2017). *La educación obligatoria en México. Informe 2017*. INEE.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah N.J.: Lawrence Erlbaum.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York, NY: Routledge.

Mayer, R. E. (1997). Multimedia learning: Are we asking the right questions? *Educational Psychologist, 32*(1), 1–19. doi:10.1207/s15326985ep3201_1

Panizza, Mabel & Sadovsky, Patricia & Sessa, Carmen. (1999). La ecuación lineal con dos variables : entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas; Vol. 17,* Núm. 3.

SEP (2017). Programas de Estudio Pensamiento Matemático. En A. Nuño Mayer et al.(Coord.), *Aprendizajes Clave para la Educación Integral* (pp. 298-326). México: SEP

Rojano Ceballos, M. T. y Solares Rojas, A. (coords.) (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países*. INEE- CINVESTAV.