Actividades que promueven la comprensión matemática desde manipulativos visuales.

Carlos Ortiz-Galvez
08059452@uagro.mx
Maribel Vicario-Mejía
mvicario@uagro.mx

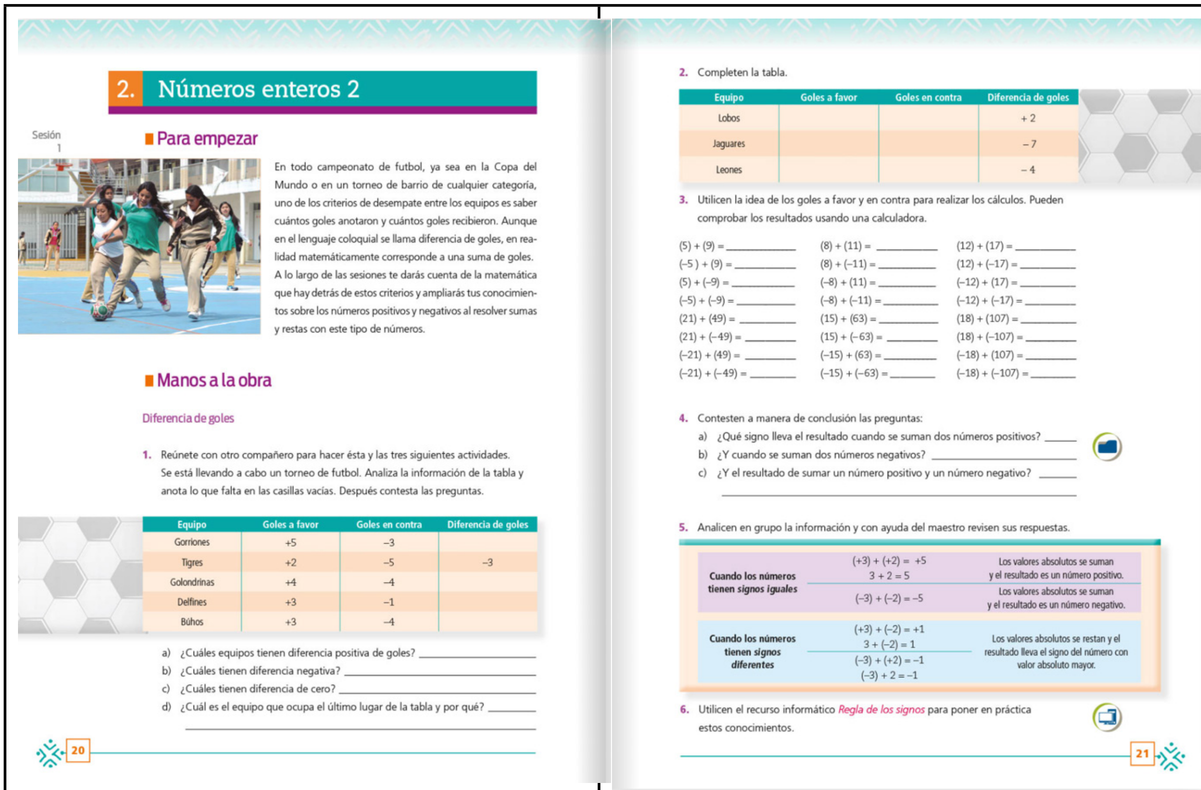
Área temática: Educación en campos disciplinares.
Línea temática: Educación matemática.
Porcentaje de avance:
Programa de posgrado: Maestría en Docencia de la Matemática, 4° semestre.
Institución donde realiza los estudios de posgrado: Universidad Autónoma de Guerrero.

Resumen

En el presente trabajo planteamos la implementación de secuencias de actividades del libro de texto, incorporando manipulativas visuales para promover la comprensión matemática de las ecuaciones de primer grado con números racionales, se experimentó con 35 alumnos de tres grados escolares (15 de 1.° grado, 12 de 2.° grado y 8 de 3.° grado) del nivel básico telesecundaria, para la recolección de datos se tomarán videos y la grabación de pantalla para mirar los procedimientos realizados. Es así que los datos recolectados se analizarán basados en los niveles de comprensión de la matemática. Se espera que los resultados obtenidos puedan reflejar que los estudiantes lograron un nivel de comprensión de extrapolación.

Palabras clave: Matemáticas, manipulativos, visuales, ecuaciones.

La herramienta fundamental para el sistema Educativo mexicano, hasta ahora, es el uso de los libros de texto, Los niveles de comprensión de la matemática, nivel reproductivo, nivel interpretativo, nivel aplicativo y nivel de extrapolación, donde cada nivel tiene una función específica para la interpretación en la comprensión de la matemática, con base en los temas revisados del libro de texto de matemáticas para el nivel de telesecundaria, se tomaron los temas que abordan las ecuaciones, pero antes de abordar directamente los temas se agregó un antecedente de las ecuaciones, siendo esto las operaciones con números enteros 2, creemos que es pertinente que se tenga como antecedente debido a la forma en que se trabajan las operaciones de la suma.



2. Números enteros 2

Sesión 1

Para empezar

En todo campeonato de futbol, ya sea en la Copa del Mundo o en un torneo de barrio de cualquier categoría, uno de los criterios de desempate entre los equipos es saber cuántos goles anotaron y cuántos goles recibieron. Aunque en el lenguaje coloquial se llama diferencia de goles, en realidad matemáticamente corresponde a una suma de goles. A lo largo de las sesiones te darás cuenta de la matemática que hay detrás de estos criterios y ampliarás tus conocimientos sobre los números positivos y negativos al resolver sumas y restas con este tipo de números.

Manos a la obra

Diferencia de goles

1. Reúnete con otro compañero para hacer ésta y las tres siguientes actividades. Se está llevando a cabo un torneo de futbol. Analiza la información de la tabla y anota lo que falta en las casillas vacías. Después contesta las preguntas.

Equipo	Goles a favor	Goles en contra	Diferencia de goles
Gorriones	+5	–3	
Tigres	+2	–5	–3
Golondrinas	+4	–4	
Delfines	+3	–1	
Búhos	+3	–4	

a) ¿Cuáles equipos tienen diferencia positiva de goles? ____________

b) ¿Cuáles tienen diferencia negativa? ____________

c) ¿Cuáles tienen diferencia de cero? ____________

d) ¿Cuál es el equipo que ocupa el último lugar de la tabla y por qué? ____________

____

20

2. Completen la tabla.

Equipo	Goles a favor	Goles en contra	Diferencia de goles
Lobos			+ 2
Jaguares			– 7
Leones			– 4

3. Utilicen la idea de los goles a favor y en contra para realizar los cálculos. Pueden comprobar los resultados usando una calculadora.

(5) + (9) = ______	(8) + (11) = ______	(12) + (17) = ______
(–5) + (9) = ______	(8) + (–11) = ______	(12) + (–17) = ______
(5) + (–9) = ______	(–8) + (11) = ______	(–12) + (17) = ______
(–5) + (–9) = ______	(–8) + (–11) = ______	(–12) + (–17) = ______
(21) + (49) = ______	(15) + (63) = ______	(18) + (107) = ______
(21) + (–49) = ______	(15) + (–63) = ______	(18) + (–107) = ______
(–21) + (49) = ______	(–15) + (63) = ______	(–18) + (107) = ______
(–21) + (–49) = ______	(–15) + (–63) = ______	(–18) + (–107) = ______

4. Contesten a manera de conclusión las preguntas:

a) ¿Qué signo lleva el resultado cuando se suman dos números positivos? ______

b) ¿Y cuando se suman dos números negativos? ______

c) ¿Y el resultado de sumar un número positivo y un número negativo? ______

______

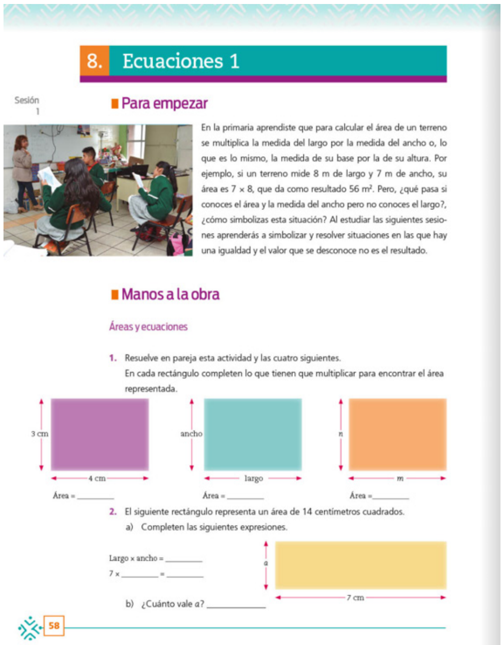
5. Analicen en grupo la información y con ayuda del maestro revisen sus respuestas.

Cuando los números tienen *signos iguales*	(+3) + (+2) = +5 3 + 2 = 5	Los valores absolutos se suman y el resultado es un número positivo.
	(–3) + (–2) = –5	Los valores absolutos se suman y el resultado es un número negativo.
Cuando los números tienen *signos diferentes*	(+3) + (–2) = +1 3 + (–2) = 1 (–3) + (+2) = –1 (–3) + 2 = –1	Los valores absolutos se restan y el resultado lleva el signo del número con valor absoluto mayor.

6. Utilicen el recurso informático *Regla de los signos* para poner en práctica estos conocimientos.

21

Telesecundaria, 1°, página 20 y 21: La lección promueve el trabajo con el lenguaje numérico, las actividades relacionan las operaciones con signos, al momento de encontrar el valor de la operación se hace referente a llegar al valor de una variable, dando así una idea de cómo se trabaja con variables, formalizando más adelante en lecciones con las ecuaciones, siendo este tema como un antecedente de las ecuaciones.



8. Ecuaciones 1

Sesión 1

Para empezar

En la primaria aprendiste que para calcular el área de un terreno se multiplica la medida del largo por la medida del ancho o, lo que es lo mismo, la medida de su base por la de su altura. Por ejemplo, si un terreno mide 8 m de largo y 7 m de ancho, su área es 7 × 8, que da como resultado 56 m². Pero, ¿qué pasa si conoces el área y la medida del ancho pero no conoces el largo?, ¿cómo simbolizas esta situación? Al estudiar las siguientes sesiones aprenderás a simbolizar y resolver situaciones en las que hay una igualdad y el valor que se desconoce no es el resultado.

Manos a la obra

Áreas y ecuaciones

1. Resuelve en pareja esta actividad y las cuatro siguientes.
   En cada rectángulo completen lo que tienen que multiplicar para encontrar el área representada.

3 cm | 4 cm | Área = ________

ancho | largo | Área = ________

n | m | Área = ________

2. El siguiente rectángulo representa un área de 14 centímetros cuadrados.
   a) Completen las siguientes expresiones.

Largo × ancho = ________

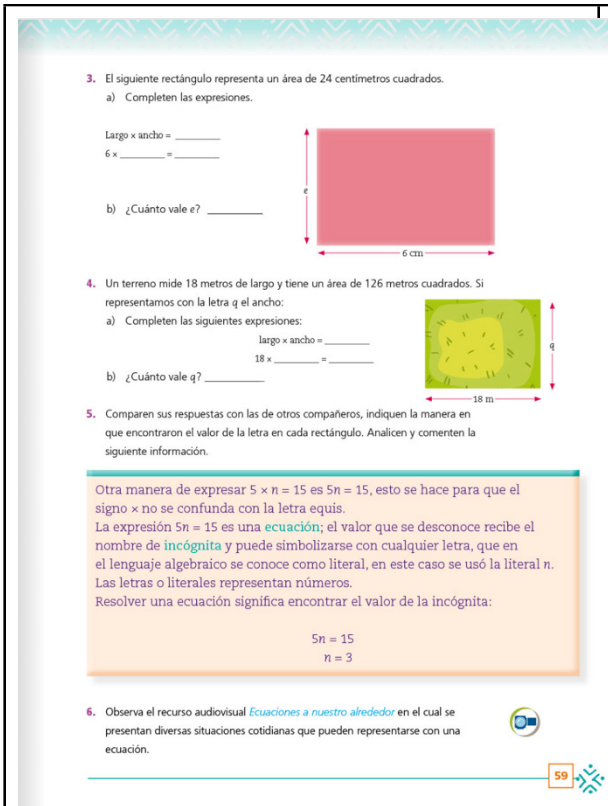
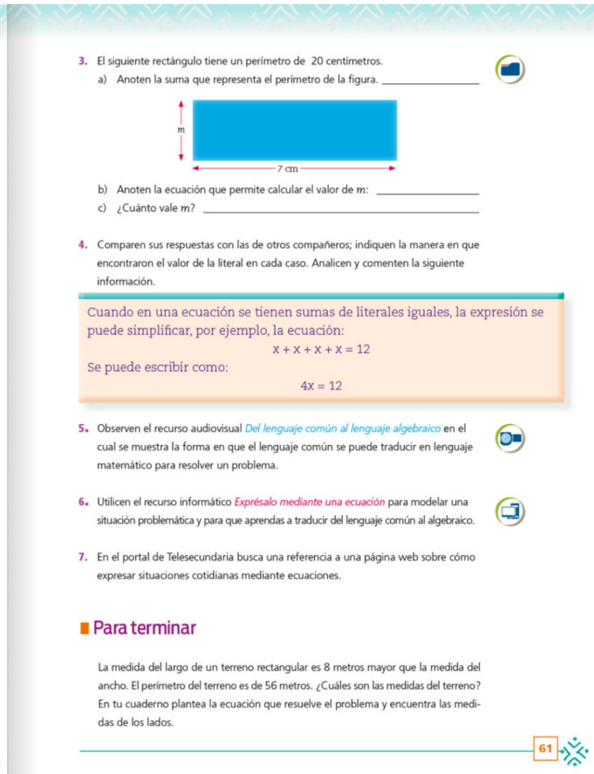
7 × ________ = ________

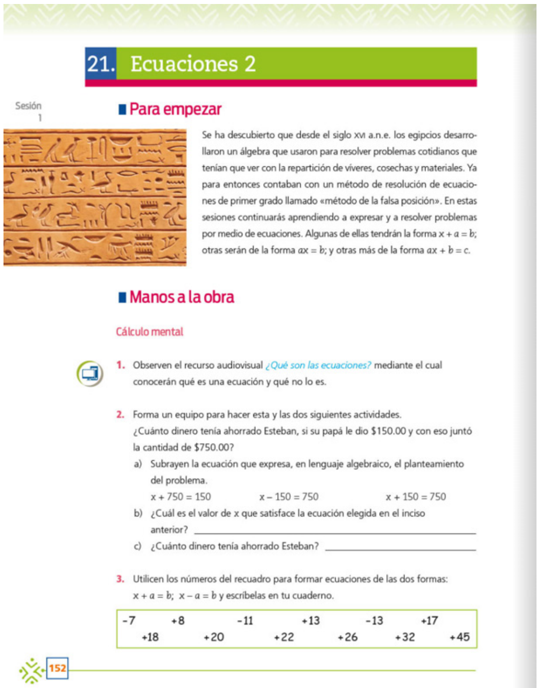
a | 7 cm

   b) ¿Cuánto vale a? ________

58

Telesecundaria, 1°, página: 58: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, con actividades de cálculo de áreas de rectángulos con valores numéricos sustituyendo estos por variables , posteriormente ejemplifica proporcionado el valor del área y un lado de un rectángulo, pide hallar el valor del lado faltante, y con esto se hace un acercamiento una introducción a las ecuaciones

<table>
<tr>
<td>
3. El siguiente rectángulo representa un área de 24 centímetros cuadrados.
a) Completen las expresiones.
Largo × ancho = ________
6 × ________ = ________
b) ¿Cuánto vale e? ________
e
6 cm
4. Un terreno mide 18 metros de largo y tiene un área de 126 metros cuadrados. Si representamos con la letra q el ancho:
a) Completen las siguientes expresiones:
largo × ancho = ________
18 × ________ = ________
b) ¿Cuánto vale q? ________
q
18 m
5. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros, indiquen la manera en que encontraron el valor de la letra en cada rectángulo. Analicen y comenten la siguiente información.
Otra manera de expresar $5 \times n = 15$ es $5n = 15$, esto se hace para que el signo × no se confunda con la letra equis.
La expresión $5n = 15$ es una ecuación; el valor que se desconoce recibe el nombre de incógnita y puede simbolizarse con cualquier letra, que en el lenguaje algebraico se conoce como literal, en este caso se usó la literal n.
Las letras o literales representan números.
Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la incógnita:
$5n = 15$
$n = 3$
6. Observa el recurso audiovisual *Ecuaciones a nuestro alrededor* en el cual se presentan diversas situaciones cotidianas que pueden representarse con una ecuación.
59</td>
<td>
3. El siguiente rectángulo tiene un perímetro de 20 centímetros.
a) Anoten la suma que representa el perímetro de la figura. ________
m
7 cm
b) Anoten la ecuación que permite calcular el valor de m: ________
c) ¿Cuánto vale m? ________
4. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros; indiquen la manera en que encontraron el valor de la literal en cada caso. Analicen y comenten la siguiente información.
Cuando en una ecuación se tienen sumas de literales iguales, la expresión se puede simplificar, por ejemplo, la ecuación:
$x + x + x + x = 12$
Se puede escribir como:
$4x = 12$
5. Observen el recurso audiovisual *Del lenguaje común al lenguaje algebraico* en el cual se muestra la forma en que el lenguaje común se puede traducir en lenguaje matemático para resolver un problema.
6. Utilicen el recurso informático *Exprésalo mediante una ecuación* para modelar una situación problemática y para que aprendas a traducir del lenguaje común al algebraico.
7. En el portal de Telesecundaria busca una referencia a una página web sobre cómo expresar situaciones cotidianas mediante ecuaciones.
Para terminar
La medida del largo de un terreno rectangular es 8 metros mayor que la medida del ancho. El perímetro del terreno es de 56 metros. ¿Cuáles son las medidas del terreno? En tu cuaderno plantea la ecuación que resuelve el problema y encuentra las medidas de los lados.
61</td>
</tr>
<tr>
<td>Telesecundaria, Matemáticas, 1°, páginas 59: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, con actividades de cálculo de áreas de rectángulos con valores numéricos, sustituyendo estos por variables , posteriormente ejemplifica proporcionado el valor del área y un lado de un rectángulo, pide hallar el valor del lado faltante, se menciona el término de ecuación e incógnita dando una definición de estos.</td>
<td>Telesecundaria, Matemáticas 1°, página 61: Promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, con actividades de cálculo de áreas de rectángulos con valores numéricos sustituyendo estos por variables , posteriormente ejemplifica proporcionado el valor del área y un lado de un rectángulo, pide hallar el valor del lado faltante, se plantea una operación con la misma variable (suma), para culminar la actividad se plantea que los alumnos planteen sus propios problemas para encontrar el valor de un lado faltante.</td>
</tr>
</table>



21. Ecuaciones 2

Sesión 1

Para empezar

Se ha descubierto que desde el siglo XVI a.n.e. los egipcios desarrollaron un álgebra que usaron para resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, cosechas y materiales. Ya para entonces contaban con un método de resolución de ecuaciones de primer grado llamado «método de la falsa posición». En estas sesiones continuarás aprendiendo a expresar y a resolver problemas por medio de ecuaciones. Algunas de ellas tendrán la forma $x + a = b$; otras serán de la forma $ax = b$; y otras más de la forma $ax + b = c$.

Manos a la obra

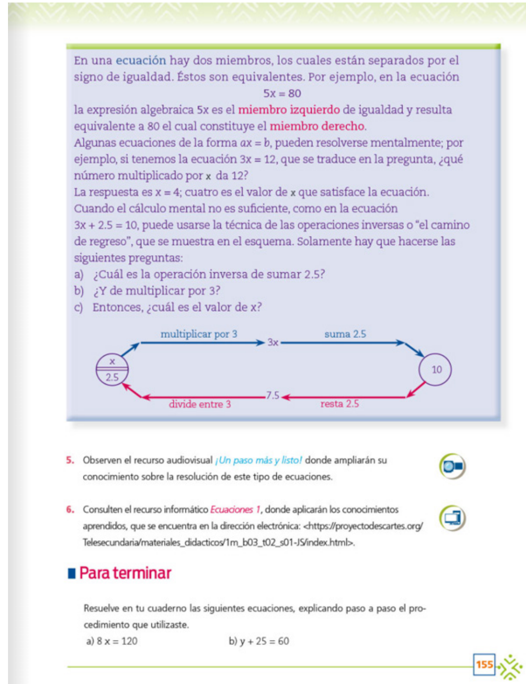
Cálculo mental

1. Observen el recurso audiovisual *¿Qué son las ecuaciones?* mediante el cual conocerán qué es una ecuación y qué no lo es.
2. Forma un equipo para hacer esta y las dos siguientes actividades.
   ¿Cuánto dinero tenía ahorrado Esteban, si su papá le dio $150.00 y con eso juntó la cantidad de $750.00?
   a) Subrayen la ecuación que expresa, en lenguaje algebraico, el planteamiento del problema.
   $x + 750 = 150$ $x - 150 = 750$ $x + 150 = 750$
   b) ¿Cuál es el valor de x que satisface la ecuación elegida en el inciso anterior? ____
   c) ¿Cuánto dinero tenía ahorrado Esteban? ____
3. Utilicen los números del recuadro para formar ecuaciones de las dos formas: $x + a = b$; $x - a = b$ y escríbelas en tu cuaderno.

-7	+8	-11	+13	-13	+17
+18	+20	+22	+26	+32	+45

152

Telesecundaria, Matemáticas 1°, página 152: promueve el trabajo algebraico, con actividades de cálculo, proponen una situación real, donde se desea saber cuánto dinero es lo que se ahorró, posteriormente se plantea una ecuación en el que se tiene que hallar el valor de la incógnita, y para terminar se plantean valores dados para que se siga practicando con la misma ecuación.



En una ecuación hay dos miembros, los cuales están separados por el signo de igualdad. Éstos son equivalentes. Por ejemplo, en la ecuación

$$5x = 80$$

la expresión algebraica 5x es el miembro izquierdo de igualdad y resulta equivalente a 80 el cual constituye el miembro derecho.
Algunas ecuaciones de la forma $ax = b$, pueden resolverse mentalmente; por ejemplo, si tenemos la ecuación $3x = 12$, que se traduce en la pregunta, ¿qué número multiplicado por x da 12?
La respuesta es $x = 4$; cuatro es el valor de x que satisface la ecuación.
Cuando el cálculo mental no es suficiente, como en la ecuación $3x + 2.5 = 10$, puede usarse la técnica de las operaciones inversas o "el camino de regreso", que se muestra en el esquema. Solamente hay que hacerse las siguientes preguntas:
a) ¿Cuál es la operación inversa de sumar 2.5?
b) ¿Y de multiplicar por 3?
c) Entonces, ¿cuál es el valor de x?

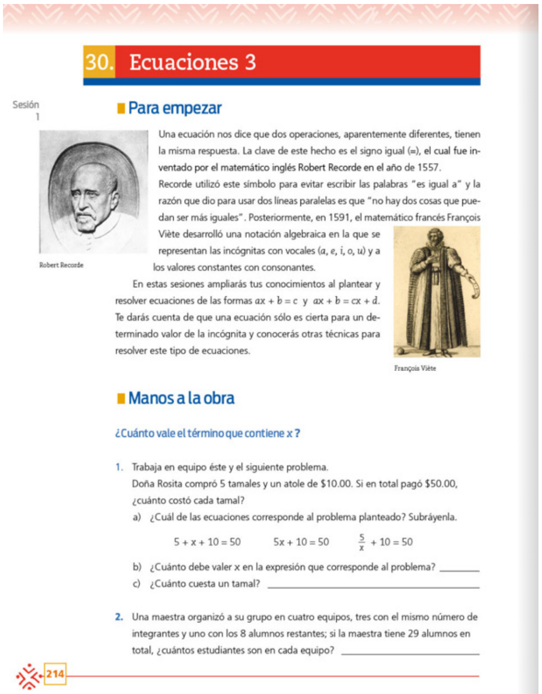
5. Observen el recurso audiovisual *¡Un paso más y listo!* donde ampliarán su conocimiento sobre la resolución de este tipo de ecuaciones.
6. Consulten el recurso informático *Ecuaciones 1*, donde aplicarán los conocimientos aprendidos, que se encuentra en la dirección electrónica: <https://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/1m_b03_t02_s01-JS/index.html>.

Para terminar

Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones, explicando paso a paso el procedimiento que utilizaste.
a) $8x = 120$ b) $y + 25 = 60$

155

Telesecundaria, Matemáticas 1°, página, 155: promueve el trabajo algebraico, con actividades de cálculo, proponen una serie de pasos para encontrar el valor de la incógnita, pasando términos del lado de la igualdad y cambiando los signos respectivamente como se necesite.



30. Ecuaciones 3

Sesión 1

Para empezar

Una ecuación nos dice que dos operaciones, aparentemente diferentes, tienen la misma respuesta. La clave de este hecho es el signo igual (=), el cual fue inventado por el matemático inglés Robert Recorde en el año de 1557.

Recorde utilizó este símbolo para evitar escribir las palabras "es igual a" y la razón que dio para usar dos líneas paralelas es que "no hay dos cosas que puedan ser más iguales". Posteriormente, en 1591, el matemático francés François Viète desarrolló una notación algebraica en la que se representan las incógnitas con vocales (a, e, i, o, u) y a los valores constantes con consonantes.

Robert Recorde

En estas sesiones ampliarás tus conocimientos al plantear y resolver ecuaciones de las formas $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$. Te darás cuenta de que una ecuación sólo es cierta para un determinado valor de la incógnita y conocerás otras técnicas para resolver este tipo de ecuaciones.

François Viète

Manos a la obra

¿Cuánto vale el término que contiene x ?

1. Trabaja en equipo éste y el siguiente problema.
Doña Rosita compró 5 tamales y un atole de $10.00. Si en total pagó $50.00, ¿cuánto costó cada tamal?
a) ¿Cuál de las ecuaciones corresponde al problema planteado? Subráyenla.

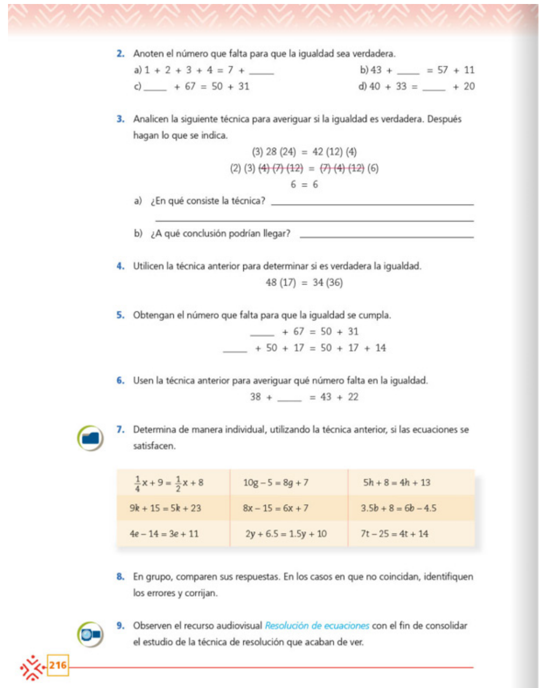
$5 + x + 10 = 50$ $\quad$ $5x + 10 = 50$ $\quad$ $\frac{5}{x} + 10 = 50$

b) ¿Cuánto debe valer x en la expresión que corresponde al problema? _______
c) ¿Cuánto cuesta un tamal? _______

2. Una maestra organizó a su grupo en cuatro equipos, tres con el mismo número de integrantes y uno con los 8 alumnos restantes; si la maestra tiene 29 alumnos en total, ¿cuántos estudiantes son en cada equipo? _______

214

Telesecundaria, Matemáticas 1°, página 214: promueve el trabajo algebraico, con actividades de cálculo, proponen una situación real, donde se menciona que se implemente el término de, se busca encontrar el valor de la incógnita pasando los valores del otro lado de la igualdad.



2. Anoten el número que falta para que la igualdad sea verdadera.
a) $1 + 2 + 3 + 4 = 7 + \_\_\_\_$ $\quad$ b) $43 + \_\_\_\_ = 57 + 11$
c) $\_\_\_\_ + 67 = 50 + 31$ $\quad$ d) $40 + 33 = \_\_\_\_ + 20$

3. Analicen la siguiente técnica para averiguar si la igualdad es verdadera. Después hagan lo que se indica.

$$(3)\ 28\ (24) = 42\ (12)\ (4)$$
$$(2)\ (3)\ \cancel{(4)}\ \cancel{(7)}\ \cancel{(12)} = \cancel{(7)}\ \cancel{(4)}\ \cancel{(12)}\ (6)$$
$$6 = 6$$

a) ¿En qué consiste la técnica? _______
b) ¿A qué conclusión podrían llegar? _______

4. Utilicen la técnica anterior para determinar si es verdadera la igualdad.
$$48\ (17) = 34\ (36)$$

5. Obtengan el número que falta para que la igualdad se cumpla.
$$\_\_\_\_ + 67 = 50 + 31$$
$$\_\_\_\_ + 50 + 17 = 50 + 17 + 14$$

6. Usen la técnica anterior para averiguar qué número falta en la igualdad.
$$38 + \_\_\_\_ = 43 + 22$$

7. Determina de manera individual, utilizando la técnica anterior, si las ecuaciones se satisfacen.

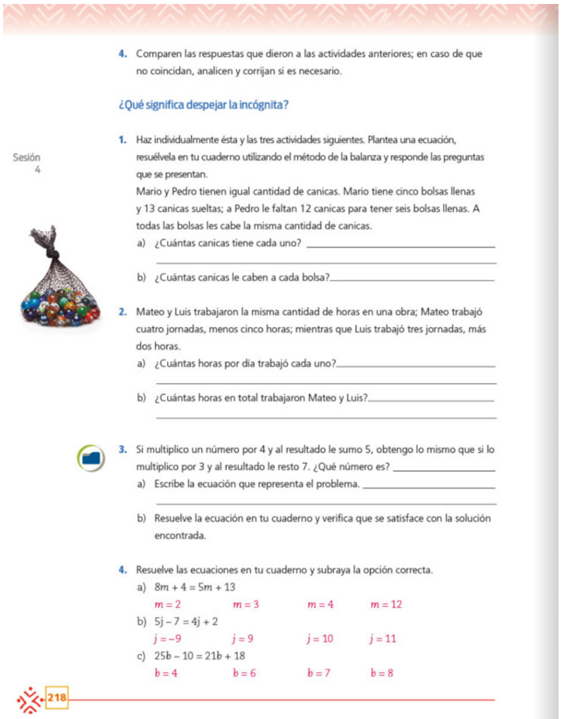
$\frac{1}{4}x + 9 = \frac{1}{2}x + 8$	$10g - 5 = 8g + 7$	$5h + 8 = 4h + 13$
$9k + 15 = 5k + 23$	$8x - 15 = 6x + 7$	$3.5b + 8 = 6b - 4.5$
$4e - 14 = 3e + 11$	$2y + 6.5 = 1.5y + 10$	$7t - 25 = 4t + 14$

8. En grupo, comparen sus respuestas. En los casos en que no coincidan, identifiquen los errores y corrijan.

9. Observen el recurso audiovisual *Resolución de ecuaciones* con el fin de consolidar el estudio de la técnica de resolución que acaban de ver.

216

Telesecundaria, Matemáticas 1°, página 216: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, con actividades de cálculo donde se tiene que encontrar el valor faltante en la operación, se hace una referencia a encontrar el valor de la incógnita, las actividades siguen haciendo referencia a las ecuaciones.



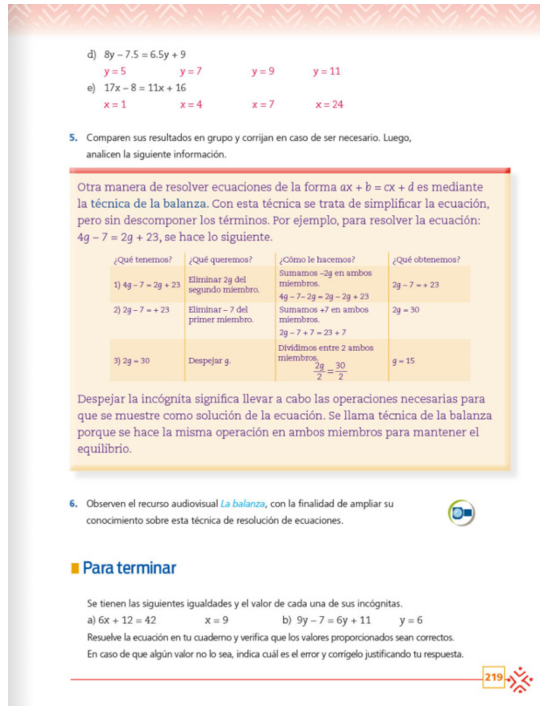
4. Comparen las respuestas que dieron a las actividades anteriores; en caso de que no coincidan, analicen y corrijan si es necesario.

¿Qué significa despejar la incógnita?

Sesión 4

1. Haz individualmente ésta y las tres actividades siguientes. Plantea una ecuación, resuélvela en tu cuaderno utilizando el método de la balanza y responde las preguntas que se presentan.
Mario y Pedro tienen igual cantidad de canicas. Mario tiene cinco bolsas llenas y 13 canicas sueltas; a Pedro le faltan 12 canicas para tener seis bolsas llenas. A todas las bolsas les cabe la misma cantidad de canicas.
   a) ¿Cuántas canicas tiene cada uno? __________
   b) ¿Cuántas canicas le caben a cada bolsa? __________
2. Mateo y Luis trabajaron la misma cantidad de horas en una obra; Mateo trabajó cuatro jornadas, menos cinco horas; mientras que Luis trabajó tres jornadas, más dos horas.
   a) ¿Cuántas horas por día trabajó cada uno? __________
   b) ¿Cuántas horas en total trabajaron Mateo y Luis? __________
3. Si multiplico un número por 4 y al resultado le sumo 5, obtengo lo mismo que si lo multiplico por 3 y al resultado le resto 7. ¿Qué número es? __________
   a) Escribe la ecuación que representa el problema. __________
   b) Resuelve la ecuación en tu cuaderno y verifica que se satisface con la solución encontrada.
4. Resuelve las ecuaciones en tu cuaderno y subraya la opción correcta.
   a) $8m + 4 = 5m + 13$
   $m = 2$ $m = 3$ $m = 4$ $m = 12$
   b) $5j - 7 = 4j + 2$
   $j = -9$ $j = 9$ $j = 10$ $j = 11$
   c) $25b - 10 = 21b + 18$
   $b = 4$ $b = 6$ $b = 7$ $b = 8$

218



d) $8y - 7.5 = 6.5y + 9$
$y = 5$ $y = 7$ $y = 9$ $y = 11$
e) $17x - 8 = 11x + 16$
$x = 1$ $x = 4$ $x = 7$ $x = 24$

5. Comparen sus resultados en grupo y corrijan en caso de ser necesario. Luego, analicen la siguiente información.

Otra manera de resolver ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$ es mediante la técnica de la balanza. Con esta técnica se trata de simplificar la ecuación, pero sin descomponer los términos. Por ejemplo, para resolver la ecuación: $4g - 7 = 2g + 23$, se hace lo siguiente.

¿Qué tenemos?	¿Qué queremos?	¿Cómo le hacemos?	¿Qué obtenemos?
1) $4g - 7 = 2g + 23$	Eliminar $2g$ del segundo miembro.	Sumamos $-2g$ en ambos miembros. $4g - 7 - 2g = 2g - 2g + 23$	$2g - 7 = + 23$
2) $2g - 7 = + 23$	Eliminar $- 7$ del primer miembro.	Sumamos $+7$ en ambos miembros. $2g - 7 + 7 = 23 + 7$	$2g = 30$
3) $2g = 30$	Despejar g.	Dividimos entre 2 ambos miembros. $\frac{2g}{2} = \frac{30}{2}$	$g = 15$

Despejar la incógnita significa llevar a cabo las operaciones necesarias para que se muestre como solución de la ecuación. Se llama técnica de la balanza porque se hace la misma operación en ambos miembros para mantener el equilibrio.

6. Observen el recurso audiovisual *La balanza*, con la finalidad de ampliar su conocimiento sobre esta técnica de resolución de ecuaciones.

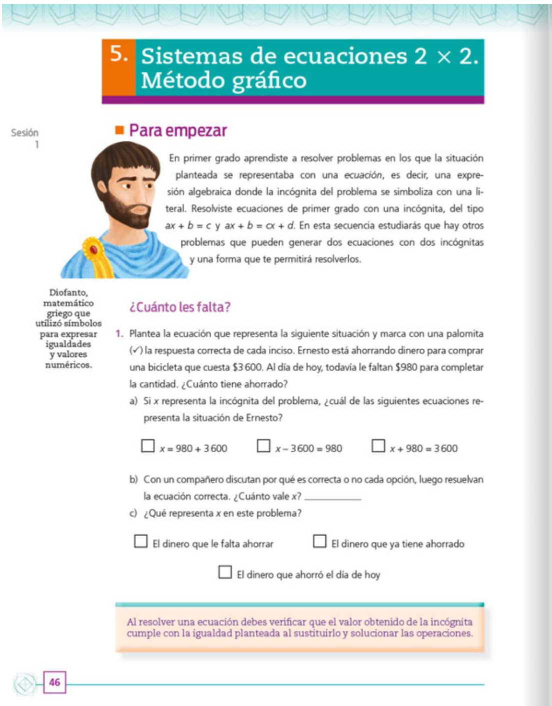
Para terminar

Se tienen las siguientes igualdades y el valor de cada una de sus incógnitas.
a) $6x + 12 = 42$ $x = 9$ b) $9y - 7 = 6y + 11$ $y = 6$
Resuelve la ecuación en tu cuaderno y verifica que los valores proporcionados sean correctos.
En caso de que algún valor no lo sea, indica cuál es el error y corrígelo justificando tu respuesta.

219

Telesecundaria, Matemáticas, 1°, página 218: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando una situación de la vida real, para esto se pretende que se trabaje con la igualdad donde se tiene que plantear dos ecuaciones en la igualdad, para saber el valor de la incógnita.

Telesecundaria, Matemáticas, 1°, página 219: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando una situación de la vida real, para esto se pretende que se trabaje con la igualdad donde se tiene que plantear dos ecuaciones en la igualdad, para saber el valor de la incógnita, y agregando un método que es el de la balanza para resolver la ecuación y conocer otras formas de resolver ecuaciones.



5. Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método gráfico

Sesión 1

Para empezar

En primer grado aprendiste a resolver problemas en los que la situación planteada se representaba con una *ecuación*, es decir, una expresión algebraica donde la incógnita del problema se simboliza con una literal. Resolviste ecuaciones de primer grado con una incógnita, del tipo $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$. En esta secuencia estudiarás que hay otros problemas que pueden generar dos ecuaciones con dos incógnitas y una forma que te permitirá resolverlos.

Diofanto, matemático griego que utilizó símbolos para expresar igualdades y valores numéricos.

¿Cuánto les falta?

1. Plantea la ecuación que representa la siguiente situación y marca con una palomita (✓) la respuesta correcta de cada inciso. Ernesto está ahorrando dinero para comprar una bicicleta que cuesta $3 600. Al día de hoy, todavía le faltan $980 para completar la cantidad. ¿Cuánto tiene ahorrado?
   a) Si x representa la incógnita del problema, ¿cuál de las siguientes ecuaciones representa la situación de Ernesto?

   ☐ $x = 980 + 3600$ ☐ $x - 3600 = 980$ ☐ $x + 980 = 3600$

   b) Con un compañero discutan por qué es correcta o no cada opción, luego resuelvan la ecuación correcta. ¿Cuánto vale x? ______
   c) ¿Qué representa x en este problema?

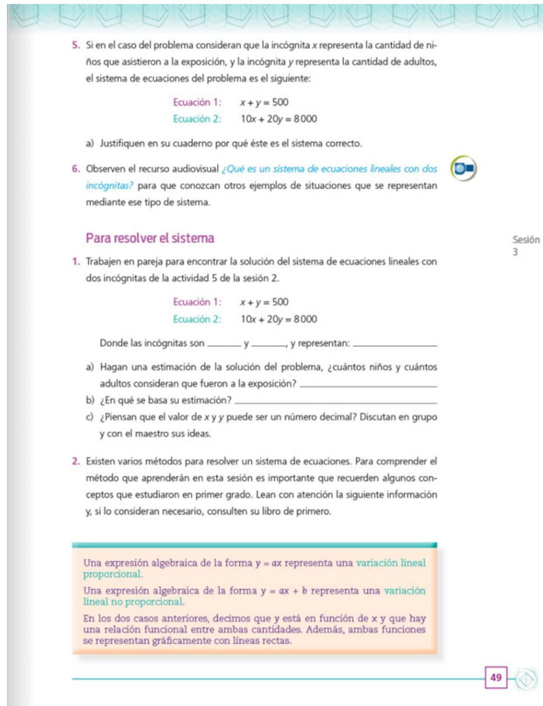
   ☐ El dinero que le falta ahorrar ☐ El dinero que ya tiene ahorrado

   ☐ El dinero que ahorró el día de hoy

Al resolver una ecuación debes verificar que el valor obtenido de la incógnita cumple con la igualdad planteada al sustituirlo y solucionar las operaciones.

46

Telesecundaria, Matemáticas 2°, página 46: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando una situación de la vida real, para esto se plantea una situación donde se tiene que saber el valor de la incógnita, pero una vez encontrado el valor se tiene que verificar que sea correcto el valor.



5. Si en el caso del problema consideran que la incógnita x representa la cantidad de niños que asistieron a la exposición, y la incógnita y representa la cantidad de adultos, el sistema de ecuaciones del problema es el siguiente:

   Ecuación 1: $x + y = 500$
   Ecuación 2: $10x + 20y = 8000$

   a) Justifiquen en su cuaderno por qué éste es el sistema correcto.

6. Observen el recurso audiovisual *¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?* para que conozcan otros ejemplos de situaciones que se representan mediante ese tipo de sistema.

Para resolver el sistema

Sesión 3

1. Trabajen en pareja para encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas de la actividad 5 de la sesión 2.

   Ecuación 1: $x + y = 500$
   Ecuación 2: $10x + 20y = 8000$

   Donde las incógnitas son ______ y ______, y representan: ______

   a) Hagan una estimación de la solución del problema, ¿cuántos niños y cuántos adultos consideran que fueron a la exposición? ______
   b) ¿En qué se basa su estimación? ______
   c) ¿Piensan que el valor de x y y puede ser un número decimal? Discutan en grupo y con el maestro sus ideas.

2. Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones. Para comprender el método que aprenderán en esta sesión es importante que recuerden algunos conceptos que estudiaron en primer grado. Lean con atención la siguiente información y, si lo consideran necesario, consulten su libro de primero.

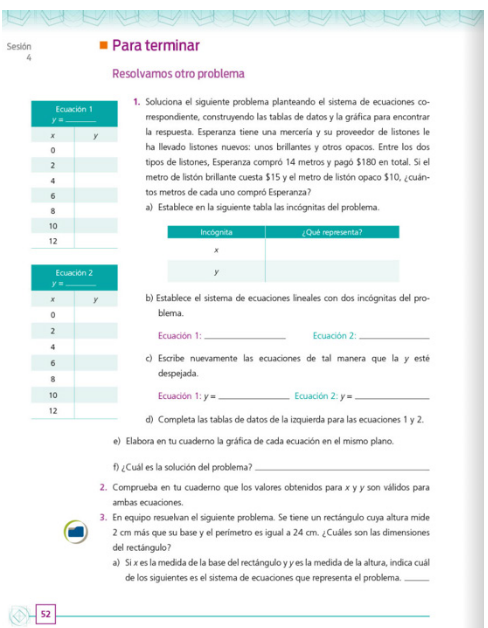
Una expresión algebraica de la forma $y = ax$ representa una variación lineal proporcional.

Una expresión algebraica de la forma $y = ax + b$ representa una variación lineal no proporcional.

En los dos casos anteriores, decimos que y está en función de x y que hay una relación funcional entre ambas cantidades. Además, ambas funciones se representan gráficamente con líneas rectas.

49

Telesecundaria, Matemáticas 2°, página 49: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando una situación de la vida real, para esto se pretende que se trabaje con dos ecuaciones dando paso a los sistemas de ecuaciones de 2x2.



Sesión 4

Para terminar

Resolvamos otro problema

Ecuación 1 $y =$ ______	
x	y
0	
2	
4	
6	
8	
10	
12	

Ecuación 2 $y =$ ______	
x	y
0	
2	
4	
6	
8	
10	
12	

1. Soluciona el siguiente problema planteando el sistema de ecuaciones correspondiente, construyendo las tablas de datos y la gráfica para encontrar la respuesta. Esperanza tiene una mercería y su proveedor de listones le ha llevado listones nuevos: unos brillantes y otros opacos. Entre los dos tipos de listones, Esperanza compró 14 metros y pagó $180 en total. Si el metro de listón brillante cuesta $15 y el metro de listón opaco $10, ¿cuántos metros de cada uno compró Esperanza?
   a) Establece en la siguiente tabla las incógnitas del problema.

Incógnita	¿Qué representa?
x	
y	

   b) Establece el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas del problema.

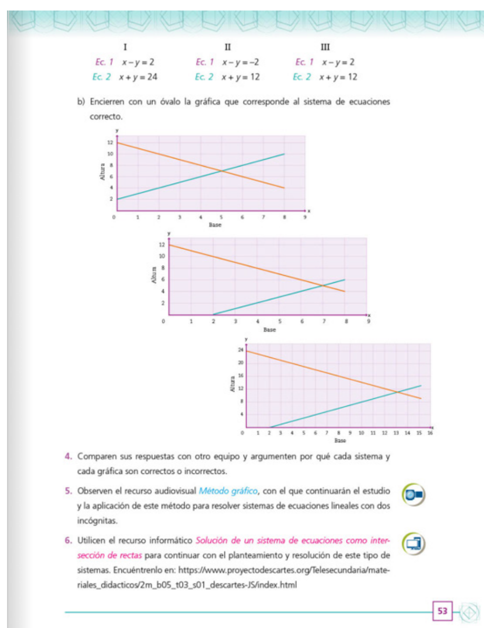
   Ecuación 1: ______ Ecuación 2: ______

   c) Escribe nuevamente las ecuaciones de tal manera que la y esté despejada.

   Ecuación 1: $y =$ ______ Ecuación 2: $y =$ ______

   d) Completa las tablas de datos de la izquierda para las ecuaciones 1 y 2.
   e) Elabora en tu cuaderno la gráfica de cada ecuación en el mismo plano.
   f) ¿Cuál es la solución del problema? ______
2. Comprueba en tu cuaderno que los valores obtenidos para x y y son válidos para ambas ecuaciones.
3. En equipo resuelvan el siguiente problema. Se tiene un rectángulo cuya altura mide 2 cm más que su base y el perímetro es igual a 24 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
   a) Si x es la medida de la base del rectángulo y y es la medida de la altura, indica cuál de los siguientes es el sistema de ecuaciones que representa el problema. ______

52

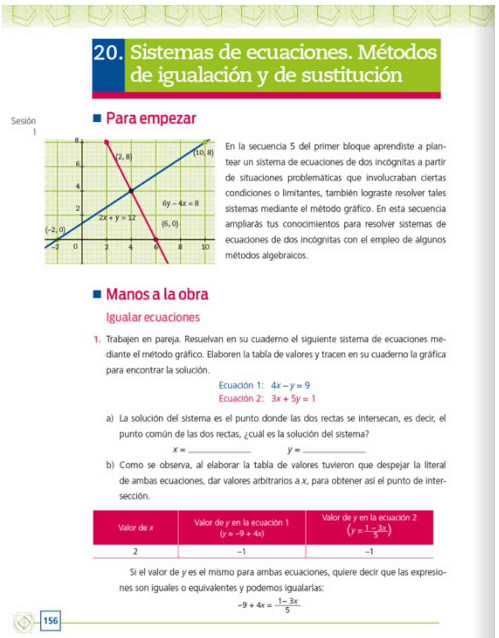
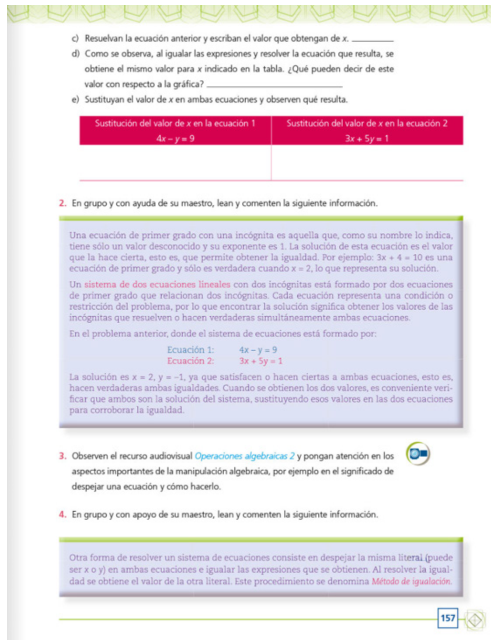


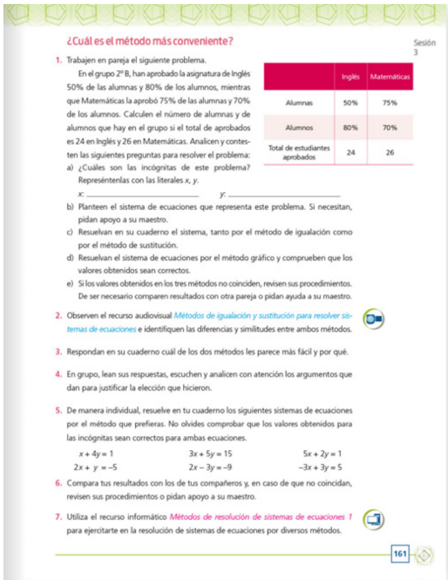
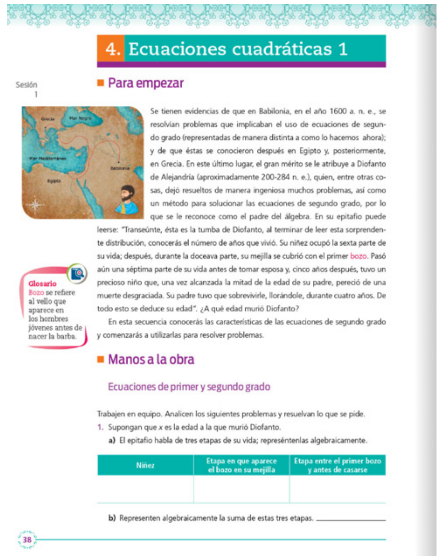
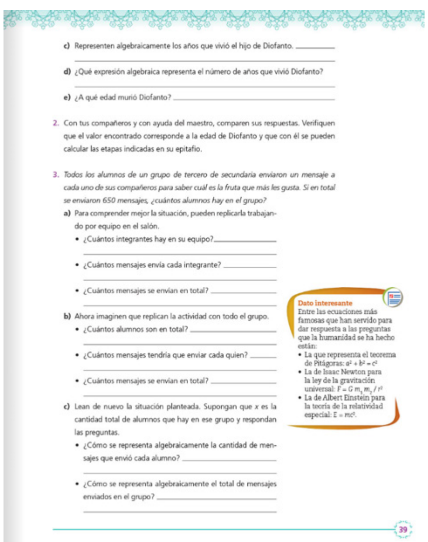
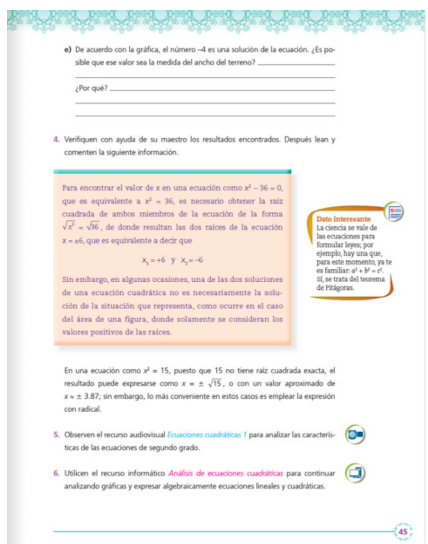
I	II	III
Ec. 1 $x - y = 2$	*Ec. 1* $x - y = -2$	*Ec. 1* $x - y = 2$
Ec. 2 $x + y = 24$	*Ec. 2* $x + y = 12$	*Ec. 2* $x + y = 12$

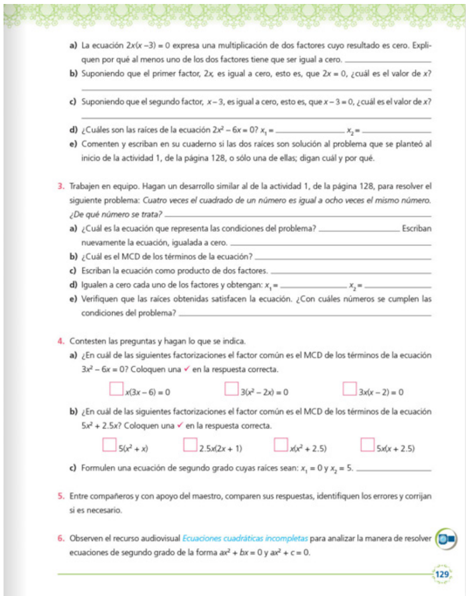
b) Encierren con un óvalo la gráfica que corresponde al sistema de ecuaciones correcto.

4. Comparen sus respuestas con otro equipo y argumenten por qué cada sistema y cada gráfica son correctos o incorrectos.
5. Observen el recurso audiovisual *Método gráfico*, con el que continuarán el estudio y la aplicación de este método para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
6. Utilicen el recurso informático *Solución de un sistema de ecuaciones como intersección de rectas* para continuar con el planteamiento y resolución de este tipo de sistemas. Encuéntrenlo en: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b05_t03_s01_descartes-JS/index.html

53

<table>
<tr>
<td>Telesecundaria, Matemáticas 2°, página 52: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando ecuaciones, pero cada ecuación se plasma en un recuadro para tabular y dar paso a la gravitación.</td>
<td>Telesecundaria, Matemáticas 2°, página 53: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, y con esto introducirse al método gráfico para comprender el comportamiento de las ecuaciones.</td>
</tr>
<tr>
<td>
20. Sistemas de ecuaciones. Métodos de igualación y de sustitución
Sesión 1
Para empezar
(2, 8) (10, 8) 6y − 4x = 8 2x + y = 12 (6, 0) (−2, 0)
En la secuencia 5 del primer bloque aprendiste a plantear un sistema de ecuaciones de dos incógnitas a partir de situaciones problemáticas que involucraban ciertas condiciones o limitantes, también lograste resolver tales sistemas mediante el método gráfico. En esta secuencia ampliarás tus conocimientos para resolver sistemas de ecuaciones de dos incógnitas con el empleo de algunos métodos algebraicos.
Manos a la obra
Igualar ecuaciones
1. Trabajen en pareja. Resuelvan en su cuaderno el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método gráfico. Elaboren la tabla de valores y tracen en su cuaderno la gráfica para encontrar la solución.
Ecuación 1: $4x - y = 9$
Ecuación 2: $3x + 5y = 1$
a) La solución del sistema es el punto donde las dos rectas se intersecan, es decir, el punto común de las dos rectas, ¿cuál es la solución del sistema?
$x =$ ______ $y =$ ______
b) Como se observa, al elaborar la tabla de valores tuvieron que despejar la literal de ambas ecuaciones, dar valores arbitrarios a x, para obtener así el punto de intersección.
Valor de x | Valor de y en la ecuación 1 ($y = -9 + 4x$) | Valor de y en la ecuación 2 $\left(y = \frac{1-3x}{5}\right)$
2 | −1 | −1
Si el valor de y es el mismo para ambas ecuaciones, quiere decir que las expresiones son iguales o equivalentes y podemos igualarlas:
$-9 + 4x = \frac{1-3x}{5}$
156</td>
<td>
c) Resuelvan la ecuación anterior y escriban el valor que obtengan de x. ______
d) Como se observa, al igualar las expresiones y resolver la ecuación que resulta, se obtiene el mismo valor para x indicado en la tabla. ¿Qué pueden decir de este valor con respecto a la gráfica? ______
e) Sustituyan el valor de x en ambas ecuaciones y observen qué resulta.
Sustitución del valor de x en la ecuación 1 $4x - y = 9$ | Sustitución del valor de x en la ecuación 2 $3x + 5y = 1$
2. En grupo y con ayuda de su maestro, lean y comenten la siguiente información.
Una ecuación de primer grado con una incógnita es aquella que, como su nombre lo indica, tiene sólo un valor desconocido y su exponente es 1. La solución de esta ecuación es el valor que la hace cierta, esto es, que permite obtener la igualdad. Por ejemplo: $3x + 4 = 10$ es una ecuación de primer grado y sólo es verdadera cuando $x = 2$, lo que representa su solución.
Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones de primer grado que relacionan dos incógnitas. Cada ecuación representa una condición o restricción del problema, por lo que encontrar la solución significa obtener los valores de las incógnitas que resuelven o hacen verdaderas simultáneamente ambas ecuaciones.
En el problema anterior, donde el sistema de ecuaciones está formado por:
Ecuación 1: $4x - y = 9$
Ecuación 2: $3x + 5y = 1$
La solución es $x = 2$, $y = -1$, ya que satisfacen o hacen ciertas a ambas ecuaciones, esto es, hacen verdaderas ambas igualdades. Cuando se obtienen los dos valores, es conveniente verificar que ambos son la solución del sistema, sustituyendo esos valores en las dos ecuaciones para corroborar la igualdad.
3. Observen el recurso audiovisual *Operaciones algebraicas 2* y pongan atención en los aspectos importantes de la manipulación algebraica, por ejemplo en el significado de despejar una ecuación y cómo hacerlo.
4. En grupo y con apoyo de su maestro, lean y comenten la siguiente información.
Otra forma de resolver un sistema de ecuaciones consiste en despejar la misma literal (puede ser x o y) en ambas ecuaciones e igualar las expresiones que se obtienen. Al resolver la igualdad se obtiene el valor de la otra literal. Este procedimiento se denomina *Método de igualación*.
157</td>
</tr>
<tr>
<td>Telesecundaria, Matemáticas 2°, página 156: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando unas actividades pero con otro método para resolver las ecuaciones (igualación y sustitución).</td>
<td>Telesecundaria, Matemáticas 2°, página 157: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando unas actividades, se especifica los términos de sistema de ecuación lineal, generando al final una discusión grupal acerca de cómo resolver el sistema de ecuaciones.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Telesecundaria, Matemáticas 2°, página 161: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando unas actividades con el propósito que se tenga ya una idea de identificar cuáles son las variables que pueden formar una ecuación, finalizando con resolver las ecuaciones con el método que más le entiendan.</td><td>Telesecundaria, Matemáticas 3°, página 38: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando unas actividades con el propósito introducirnos a las ecuaciones cuadráticas con un epitafio, planteando un recuadro donde se espera que pueda colocar las incógnitas correspondientes.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Telesecundaria, Matemáticas 3°, página 39: La lección promueve el lenguaje algebraico, planteando el análisis del epitafio, con preguntas guías se pretende que se identifique las partes de la ecuación.</td><td>Telesecundaria, Matemáticas 3°, página 45: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, al resolver una ecuación de segundo grado se estará encontrando las raíces, pero para hallar el valor de estas raíces se tiene que introducir la raíz cuadrada.</td></tr>
</table>



a) La ecuación $2x(x-3) = 0$ expresa una multiplicación de dos factores cuyo resultado es cero. Expliquen por qué al menos uno de los dos factores tiene que ser igual a cero. ______

b) Suponiendo que el primer factor, $2x$, es igual a cero, esto es, que $2x = 0$, ¿cuál es el valor de x? ______

c) Suponiendo que el segundo factor, $x-3$, es igual a cero, esto es, que $x-3 = 0$, ¿cuál es el valor de x? ______

d) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $2x^2 - 6x = 0$? $x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

e) Comenten y escriban en su cuaderno si las dos raíces son solución al problema que se planteó al inicio de la actividad 1, de la página 128, o sólo una de ellas; digan cuál y por qué.

3. Trabajen en equipo. Hagan un desarrollo similar al de la actividad 1, de la página 128, para resolver el siguiente problema: *Cuatro veces el cuadrado de un número es igual a ocho veces el mismo número. ¿De qué número se trata?* ______

a) ¿Cuál es la ecuación que representa las condiciones del problema? ______ Escriban nuevamente la ecuación, igualada a cero. ______

b) ¿Cuál es el MCD de los términos de la ecuación? ______

c) Escriban la ecuación como producto de dos factores. ______

d) Igualen a cero cada uno de los factores y obtengan: $x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

e) Verifiquen que las raíces obtenidas satisfacen la ecuación. ¿Con cuáles números se cumplen las condiciones del problema? ______

4. Contesten las preguntas y hagan lo que se indica.

a) ¿En cuál de las siguientes factorizaciones el factor común es el MCD de los términos de la ecuación $3x^2 - 6x = 0$? Coloquen una ✓ en la respuesta correcta.

☐ $x(3x-6) = 0$ ☐ $3(x^2 - 2x) = 0$ ☐ $3x(x-2) = 0$

b) ¿En cuál de las siguientes factorizaciones el factor común es el MCD de los términos de la ecuación $5x^2 + 2.5x$? Coloquen una ✓ en la respuesta correcta.

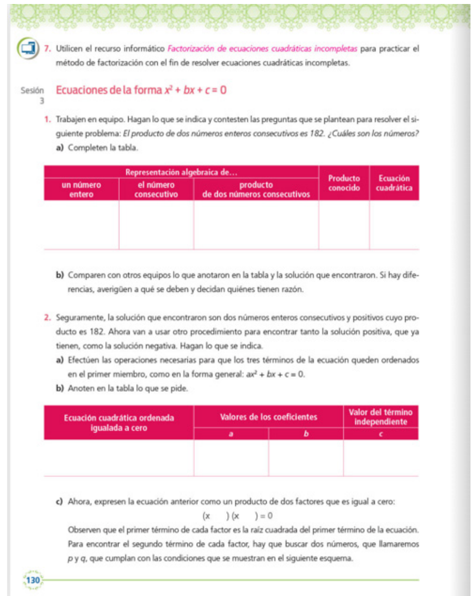
☐ $5(x^2 + x)$ ☐ $2.5x(2x+1)$ ☐ $x(x^2 + 2.5)$ ☐ $5x(x + 2.5)$

c) Formulen una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean: $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$. ______

5. Entre compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan si es necesario.

6. Observen el recurso audiovisual *Ecuaciones cuadráticas incompletas* para analizar la manera de resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx = 0$ y $ax^2 + c = 0$.

129



7. Utilicen el recurso informático *Factorización de ecuaciones cuadráticas incompletas* para practicar el método de factorización con el fin de resolver ecuaciones cuadráticas incompletas.

Sesión 3

Ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$

1. Trabajen en equipo. Hagan lo que se indica y contesten las preguntas que se plantean para resolver el siguiente problema: *El producto de dos números enteros consecutivos es 182. ¿Cuáles son los números?*

a) Completen la tabla.

Representación algebraica de...			Producto conocido	Ecuación cuadrática
un número entero	el número consecutivo	producto de dos números consecutivos		

b) Comparen con otros equipos lo que anotaron en la tabla y la solución que encontraron. Si hay diferencias, averigüen a qué se deben y decidan quiénes tienen razón.

2. Seguramente, la solución que encontraron son dos números enteros consecutivos y positivos cuyo producto es 182. Ahora van a usar otro procedimiento para encontrar tanto la solución positiva, que ya tienen, como la solución negativa. Hagan lo que se indica.

a) Efectúen las operaciones necesarias para que los tres términos de la ecuación queden ordenados en el primer miembro, como en la forma general: $ax^2 + bx + c = 0$.

b) Anoten en la tabla lo que se pide.

Ecuación cuadrática ordenada igualada a cero	Valores de los coeficientes		Valor del término independiente
	a	b	c

c) Ahora, expresen la ecuación anterior como un producto de dos factores que es igual a cero:

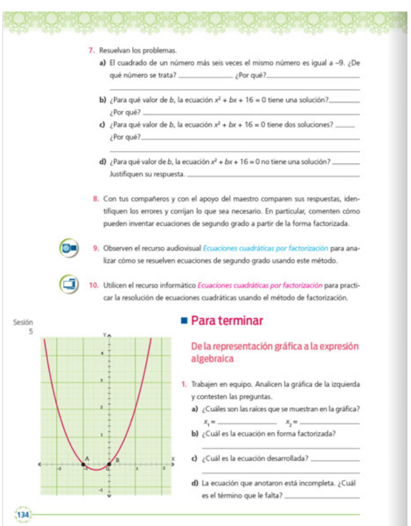
(x) (x) = 0

Observen que el primer término de cada factor es la raíz cuadrada del primer término de la ecuación. Para encontrar el segundo término de cada factor, hay que buscar dos números, que llamaremos p y q, que cumplan con las condiciones que se muestran en el siguiente esquema.

130

Telesecundaria, Matemáticas 3°, página 129: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando unas actividades con el propósito de seguir trabajando con las ecuaciones de segundo grado, se plantean operaciones con multiplicación con el motivo de trabajar las leyes de exponente y así generar las ecuaciones de segundo grado.

Telesecundaria, Matemáticas 3°, página 130: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando unas actividades con el propósito de introducirnos a las ecuaciones cuadráticas, pero en su forma completa del tipo .



7. Resuelvan los problemas.

a) El cuadrado de un número más seis veces el mismo número es igual a –9. ¿De qué número se trata? ______ ¿Por qué? ______

b) ¿Para qué valor de b, la ecuación $x^2 + bx + 16 = 0$ tiene una solución? ______ ¿Por qué? ______

c) ¿Para qué valor de b, la ecuación $x^2 + bx + 16 = 0$ tiene dos soluciones? ______ ¿Por qué? ______

d) ¿Para qué valor de b, la ecuación $x^2 + bx + 16 = 0$ no tiene una solución? ______ Justifiquen su respuesta. ______

8. Con tus compañeros y con el apoyo del maestro comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan lo que sea necesario. En particular, comenten cómo pueden inventar ecuaciones de segundo grado a partir de la forma factorizada.

9. Observen el recurso audiovisual *Ecuaciones cuadráticas por factorización* para analizar cómo se resuelven ecuaciones de segundo grado usando este método.

10. Utilicen el recurso informático *Ecuaciones cuadráticas por factorización* para practicar la resolución de ecuaciones cuadráticas usando el método de factorización.

Sesión 5

■ Para terminar

De la representación gráfica a la expresión algebraica

1. Trabajen en equipo. Analicen la gráfica de la izquierda y contesten las preguntas.

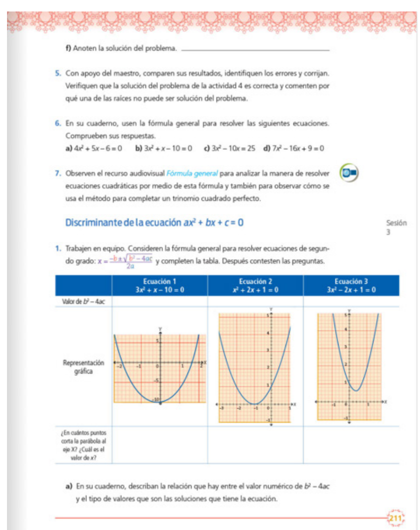
a) ¿Cuáles son las raíces que se muestran en la gráfica? $x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

b) ¿Cuál es la ecuación en forma factorizada? ______

c) ¿Cuál es la ecuación desarrollada? ______

d) La ecuación que anotaron está incompleta. ¿Cuál es el término que le falta? ______

134



f) Anoten la solución del problema. ______

5. Con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan. Verifiquen que la solución del problema de la actividad 4 es correcta y comenten por qué una de las raíces no puede ser solución del problema.

6. En su cuaderno, usen la fórmula general para resolver las siguientes ecuaciones. Comprueben sus respuestas.

a) $4x^2 + 5x - 6 = 0$ b) $3x^2 + x - 10 = 0$ c) $3x^2 - 10x = 25$ d) $7x^2 - 16x + 9 = 0$

7. Observen el recurso audiovisual *Fórmula general* para analizar la manera de resolver ecuaciones cuadráticas por medio de esta fórmula y también para observar cómo se usa el método para completar un trinomio cuadrado perfecto.

Discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

Sesión 3

1. Trabajen en equipo. Consideren la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y completen la tabla. Después contesten las preguntas.

	Ecuación 1 $3x^2 + x - 10 = 0$	Ecuación 2 $x^2 + 2x + 1 = 0$	Ecuación 3 $3x^2 - 2x + 1 = 0$
Valor de $b^2 - 4ac$			
Representación gráfica			
¿En cuántos puntos corta la parábola al eje X? ¿Cuál es el valor de x?			

a) En su cuaderno, describan la relación que hay entre el valor numérico de $b^2 - 4ac$ y el tipo de valores que son las soluciones que tiene la ecuación.

211

Telesecundaria, Matemáticas 3°, página 134: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando unas preguntas guías, se espera que se resuelvan las actividades planteadas, al término de las actividades se muestra una gráfica donde de lo gráfico se tiene que pasar a lo algebraico, generando la ecuación de segundo grado.	Telesecundaria, Matemáticas 3°, página 211: La lección promueve la transición del lenguaje numérico al lenguaje algebraico, planteando la solución de ecuaciones de segundo grado e identificando las partes de la ecuación para solucionarlos con la fórmula general.

Introducción

Para la comprensión matemática involucra diferentes factores uno de estos es el modelo cognitivo donde la función es entender la complejidad de la matemática a abordar, pero para llegar a se articula los componentes lingüísticos, situacionales y regulativos de las matemáticas, y siendo comprensión que articula aspectos conceptuales y discursivos Godino (2000), se sabe que para entender la comprensión matemática se plantean dos escenarios la epistemología y la fenología, y donde cada escenario tiene su propia forma de integrar el conocimiento tal es el caso de la epistemología que relaciona otros conocimientos matemáticos, la fenomenología que surge de situaciones que dan sentido al propio conocimiento Gallardo et al., (2008), para llegar a la comprensión de la matemática se tiene que llevar procesos, pero antes de todos los procesos se tiene que recurrir a uno primordial que es la lectura, para esto se proponen lecturas que atraigan la atención del estudiante como lo afirma Santos Barón (2012), la dificultad que se presenta a la comprensión matemática verse reflejado en distintos escenarios, como en el aula, teoremas, demostraciones, métodos o procedimientos, etc., Torres Alcaraz (2016).

El trabajo se basó en una secuencia didáctica, donde nos centramos en la revisión de los temas que abordan las ecuaciones en el nivel básico (Telesecundaria), con la revisión de los temas tomamos actividades que se implementaron en los tres niveles de la telesecundaria (1°,2° y 3°), para saber el impacto que las actividades tuvieron en los alumnos para esto tomamos los niveles de comprensión de la matemática descritos a continuación. 1. Nivel reproductivo: El estudiante repite el conocimiento que se le ha informado o la habilidad adquirida en los ejercicios iguales o similares a los ya resueltos, 2. Nivel interpretativo: en este nivel el estudiante establece relaciones entre los contenidos matemáticos objeto de estudio y los precedentes, integra la información y emite sus juicios y sus valoraciones, 3. Nivel aplicativo: en este nivel el estudiante emplea los contenidos esencialmente en la asimilación de los nuevos aprendizajes, 4. Nivel de extrapolación: en este nivel el estudiante resuelve las tareas docentes más complejas, elevando a problemáticas superiores los contenidos aprendidos, lo que se evidencia en la creación de las nuevas situaciones Carlos et al.,(2018b).

El trabajo se aplicó en los tres niveles de la telesecundaria, los interactivos que se aplicaron con base a los temas que se imparten en los libros de matemáticas (ecuaciones), en donde cada alumno reflejo un nivel de comprensión de la matemática adecuado para el objetivo que se pretendía en un inicio.

Referencias

Carlos, J., González, N., Mabel Hernández Pérez, B., Reyes, E. V., Bárbara, V., Reyes, N., Dionisia, H., Martín, S., & Valdés, D. (2018a). *Los niveles de comprensión del contenido en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática* (Vol. 13, Issue 2). http://www.uv.es/gutierre/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

Carlos, J., González, N., Mabel Hernández Pérez, B., Reyes, E. V., Bárbara, V., Reyes, N., Dionisia, H., Martín, S., & Valdés, D. (2018b). *Los niveles de comprensión del contenido en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática* (Vol. 13, Issue 2). http://www.uv.es/gutierre/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

Gallardo, J., Luis González Marí, J., & Quispe Yapo, W. (2008). *Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración: Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción*. https://www.researchgate.net/publication/28236427

Godino, J. D. (2000). *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos Onto-semiotic Approach (OSA) / Enfoque Ontosemiótico (EOS) View project Geometry / Geometría View project*. https://www.researchgate.net/publication/39145596

Santos Barón, E. (2012). *La lectura como medio para la comprensión de conceptos*.

Torres Alcaraz, C. (2016). Acerca de la comprensión en matemáticas. In *Miscelánea Matemática* (Vol. 62).