RMIE, 2018, VOL. 23, NÚM. 76, PP. 229-251 (ISSN: 14056666)

Investigación

CARACTERÍSTICAS DEL CONOCIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO ESPAÑOLES EN RELACIÓN CON LA FRACCIÓN, RAZÓN Y PROPORCIÓN

ÀNGELA BUFORN / SALVADOR LLINARES / CENEIDA FERNÁNDEZ

Resumen:
Este estudio examina características del conocimiento de estudiantes para maestro (futuros profesores) sobre sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional. Los participantes fueron 91 estudiantes de la Universidad de Alicante (España) que resolvieron 12 problemas vinculados a estos sub-constructos. Mediante un análisis de conglomerados se identificaron cuatro perfiles parcialmente anidados considerando cómo los estudiantes resolvían los problemas: 1) resuelven problemas procedimentales y aplican un pensamiento multiplicativo (perfil 1); 2) resuelven problemas procedimentales y aplican un pensamiento aditivo (perfil 3); 3) diferencian situaciones proporcionales y no proporcionales y consolidan el esquema fraccionario (perfil 2), y 4) diferencian situaciones proporcionales y no proporcionales y manifiestan comprensión de la comparación de razones (perfil 4). Estos resultados proporcionan información para el diseño de tareas profesionales vinculadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria en los programas de formación de maestros.

Abstract:
This article examines the characteristics of pre-service teachers' knowledge of sub-constructs implied in proportional reasoning. The participants were 91 students at Universidad de Alicante (Spain), who solved twelve problems related to these sub-constructs. A cluster analysis identified four partially nested profiles, in terms of the way the students solved the problems: 1) Those who solve procedural problems and apply multiplicative thinking (Profile One); 2) Those who solve procedural problems and apply additive thinking (Profile Three); 3) Those who differentiate between proportional and nonproportional situations and consolidate the fractional system (Profile Two); and 4) Those who differentiate between proportional and nonproportional situations and show an understanding of the comparison of ratios (Profile Four). The results provide information for designing professional tasks linked to teaching and learning mathematics for teacher training programs in elementary education.

Palabras clave: formación de profesores, educación matemática, estilos de aprendizaje, razonamiento matemático.
Keywords: teacher training, mathematics education, learning styles, mathematical reasoning.

Àngela Buforn, Salvador Llinares y Ceneida Fernández: profesores de la Universidad de Alicante, Departamento de Innovación y Formación Didáctica. C/ Aeroplano, s/n, 03690, Sant Vicent del Raspeig, Alicante, España. CE: angela.buforn@ua.es / sllinares@ua.es / ceneida.fernandez@ua.es

Introducción

Caracterizar el conocimiento de matemáticas que deben tener los maestros es una tarea relevante para el avance de sus procesos de formación y para una mejor comprensión de sus métodos de aprendizaje. En los últimos años se han desarrollado diferentes iniciativas para determinar este conocimiento bajo la hipótesis de la existencia de una relación entre la calidad del conocimiento de matemáticas del maestro y el aprendizaje de sus alumnos (Ball, Thames y Phelps, 2008; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005). Se asume que el conocimiento de matemáticas del profesor es clave en el desarrollo de competencias docentes relativas a la organización del contenido matemático para enseñar y a la interpretación de la manera en la que los alumnos de primaria aprenden las matemáticas. Por tanto, un conocimiento limitado del contenido matemático dificultará a los maestros realizar la tarea de enseñar (Fernández, Llinares y Valls, 2013; Rivas, Godino y Castro, 2012). En este sentido, preguntarse qué conocen y qué deben conocer los futuros profesores sobre el contenido matemático traslada la atención hacia las relaciones entre diferentes dominios del conocimiento de matemáticas (Ekawati, Lin y Yang, 2015; Hill, Ball y Schilling, 2008; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007).

Un contenido matemático de interés en esta línea de investigación es el razonamiento proporcional y, en particular, los conceptos de fracción, razón y proporción (Lamon, 2005). Investigaciones previas han señalado que estos conceptos son difíciles de aprender por los alumnos (Ben-Chaim, Fay, Fitzgerald, Benedetto y Miller, 1998; Fernández y Llinares, 2010; Hart, 1984; Lamon, 2007) y que este fenómeno puede estar relacionado con el conocimiento del maestro de estos conceptos. Por otra parte, diferentes estudios han mostrado rasgos específicos del conocimiento de los futuros profesores de ideas implicadas en estos conceptos: la unidad y la constitución de unidades múltiples (Buforn y Fernández, 2014b; Lee, Brown y Orril, 2011), la interpretación de la comparación de razones (Gómez y García, 2014; Livy y Vale, 2011) y el reconocimiento de situaciones proporcionales (Buforn y Fernández, 2014a). Sin embargo, es necesario examinar relaciones entre las ideas que subyacen a estos conceptos para describir dominios más amplios de conocimiento de matemáticas de los futuros maestros; así, nuestro objetivo es identificar características del conocimiento sobre la fracción, razón y proporción como apoyo para la realización de tareas profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas en educación primaria.

Marco teórico

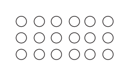
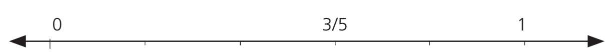
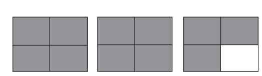
Para abordar nuestro objetivo consideramos dos referentes teóricos. Por una parte, los aspectos relativos a la fracción, razón y proporción que fundamentan el razonamiento proporcional. En segundo lugar, lo que se conoce sobre la comprensión de los profesores (tanto en formación como en ejercicio) sobre estos conceptos.

Razonamiento proporcional: conceptos de fracción, razón y proporción

El desarrollo del razonamiento proporcional es multifacético e integra diferentes sub-constructos; en nuestro estudio consideramos los 12 del razonamiento proporcional propuestos por Lamon (2005) y validados empíricamente por Pitta-Pantazi y Christou (2011) organizados en tres dominios: esquema fraccionario, comparación de razones y distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales (tabla 1).

TABLA 1

Cuestionario

Estructura del cuestionario	Problemas
Bloque A: esquema fraccionario (6 problemas)	1. Parte-todo: ¿Cuántos puntos son 2/3 del conjunto dado? 
	2. Medida-recta numérica: Localiza 2/10 en la siguiente recta numérica. Justifica tu respuesta 
	3. Medida-densidad: Encuentra dos fracciones que estén entre 1/6 y 1/5.
	4. Reparto equitativo-cociente: Cuatro personas van a compartir 3 pizzas idénticas. ¿Cuánto le tocará a cada persona si todos comerán la misma cantidad de pizza? Haz un dibujo que muestre lo que le toca a cada persona
	5. Razonamiento *up and down*: La parte sombreada de esta figura representa 3+2/3. ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños? 
	6. Operador: El profesor le dijo a Nicolás que hiciese unas fotocopias. Nicolás cometió un error y apretó el botón que reduce el tamaño de cada copia a ¾. ¿Cuánto debe aumentar Nicolás el tamaño de las copias reducidas para conseguir el tamaño original?

(CONTINÚA)

TABLA 1 / CONTINUACIÓN

Estructura del cuestionario	Problemas
Bloque B: diferenciar situaciones proporcionales y no proporcionales (2 problemas)	7. Problema valor perdido proporcional: La máquina R y J producen tornillos en una fábrica. Empezaron al mismo tiempo pero la máquina J es más rápida. Cuando la máquina R ha producido 40 tornillos, la máquina J ha producido 120 tornillos. Si la máquina R ha fabricado 200 tornillos, ¿cuántos tornillos habrá fabricado la máquina J?
	8. Problema valor perdido no proporcional: Las empresas A y B fabrican tornillos a la misma velocidad pero la empresa B ha empezado antes. Cuando la empresa A ha fabricado 40 cajas, la empresa B ha fabricado 120 cajas. Si la empresa A ha fabricado 120 cajas, ¿cuántas cajas tendrá fabricadas la empresa B?
Bloque C: comparación de razones (4 problemas)	9. Pensamiento relativo-absoluto: José tiene dos serpientes: Judía verde y Esbelta. Ahora mismo, Judía verde mide 40cm de longitud y Esbelta 50cm de longitud. Juan sabe que dentro de dos años, ambas serpientes habrán crecido completamente. La longitud de Judía verde será de 70cm, mientras que la de Esbelta será de 80cm. Dentro de dos años, ¿habrán crecido ambas la misma cantidad?
	10. Proceso unitizing: La caja con 16kg de cereales A cuesta 3.36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2.64€. ¿Qué caja es más barata?
	11. Razón: En un nuevo edificio se venden lofs rectangulares de tres tamaños diferentes: a) 7.5 metros por 11.4 metros, b) 4.55 metros por 5.08 metros, y c) 18.5 metros por 24.5 metros. ¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado?
	12. Covarianza: Responde a los siguientes apartados: a) Ana condujo hoy menos kilómetros en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad menor? b) Pepe dio hoy más vueltas en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad mayor?

El esquema fraccionario está vinculado a seis sub-constructos; el *parte-todo*, que se define como la relación entre el número de partes congruentes en las que se divide una cantidad continua o un conjunto de objetos discretos y el todo (problema 1, tabla 1). Con este significado de fracción (como parte-todo), el sub-constructo *razonamiento up and down*, que implica coordinar la idea de la fracción como una unidad múltiple (a/b = a veces 1/b) con la idea de fracción unitaria (1/n) como una unidad iterativa y se manifiesta en las actividades de representar fracciones a partir de otra fracción (problema 5, tabla 1) (Lamon, 2007). Por otra parte, está vinculado a la fracción como número asignado a una medida usando la recta numérica como representación, sub-constructo *medida-recta numérica* (problema 2, tabla 1) (Hannula, 2003; Pitta-Pantazi y Christou, 2011) y a la idea de densidad de los números racionales: sub-constructo *medida-densidad* (problema 3, tabla 1). Finalmente, el sub-constructo *cociente* que se vincula al proceso y resultado de un reparto equitativo (problema 4, tabla 1), y el sub-constructo *operador*, que implica una función aplicada a un número, objeto o conjunto (problema 6, tabla 1) (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992).

En cuanto a la comparación de razones (cualitativa y cuantitativa) consideramos las ideas de *covarianza*, definida como la relación entre dos cantidades de manera que, cuando cambia una cantidad, la otra también cambia de una manera particular con respecto a la primera (problema 12, tabla 1); de *razón*, como índice comparativo (problema 11, tabla 1); el *proceso unitizing*, que implica la construcción de una unidad de referencia y su uso para comparar situaciones (problema 10, tabla 1), y el reconocimiento de comparaciones absolutas y relativas *pensamiento relacional* (problema 9, tabla 1) (Pitta-Pantazi y Christou, 2011).

Finalmente, consideramos la habilidad de distinguir situaciones proporcionales y no proporcionales (Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaffel, 2008). El conocimiento de los conceptos de razón y proporción que fundamentan el razonamiento proporcional conlleva varios procesos cognitivos interrelacionados que van desde el pensamiento cualitativo hasta el razonamiento multiplicativo e implica comprender las relaciones multiplicativas entre variables en situaciones proporcionales y reconocer cuándo no se dan estas relaciones multiplicativas (problemas 7 y 8, tabla 1) (Modestou y Gagatsis, 2010). Es decir, el razonamiento proporcional, entendido como un proceso cognitivo, implica ser capaz de describir, predecir o evaluar relaciones entre dos relaciones (Behr *et al.*, 1992; Kaput y Maxwell, 1994).

Conocimiento de los maestros y los futuros maestros de la fracción, razón y proporción

La enseñanza de la fracción y la razón para apoyar el desarrollo del razonamiento proporcional exige a los maestros comprender los sub-constructos anteriores y sus relaciones. Sin embargo, investigaciones previas indican que los futuros profesores tienen dificultades en la construcción de una unidad y la identificación de una unidad de referencia (Buforn y Fernández, 2014b; Lee *et al.*, 2011), en resolver problemas de comparación de razones mostrando dificultades al interpretarlas (magnitudes que se están comparando) (Gómez y García, 2014) o en comparaciones todo-todo en un contexto de escalas (Livy y Vale, 2011) y en problemas que requieren identificar situaciones no proporcionales (Buforn y Fernández, 2014a).

Además, los futuros profesores suelen confiar en explicaciones procedimentales para justificar sus estrategias de resolución en problemas de proporcionalidad en los que se dan tres cantidades y se pregunta por una cuarta entre las que se establece una relación de proporcionalidad (problema de valor perdido) (Post, Harel, Behr y Lesh, 1988) siendo poco flexibles en resolver el mismo problema usando diferentes métodos (Berk, Taber, Carrino-Gorowara, y Poetzl, 2009).

Estas investigaciones previas muestran rasgos particulares del conocimiento de los futuros profesores sobre la fracción, razón y proporción. Sin embargo, es necesario examinar el papel de los diferentes sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional y sus relaciones en la caracterización del conocimiento de estos estudiantes.

Preguntas de investigación

Teniendo en cuenta las características de los diferentes sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

1) ¿En qué medida dichos sub-constructos forman parte del conocimiento de los futuros profesores?
2) ¿Cuáles son las características del conocimiento de los futuros profesores de los distintos sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional?

Método

Participantes y contexto

Los participantes fueron 91 estudiantes del grado de Educación primaria, matriculados en un programa de formación inicial de la Universidad de Alicante (España) que les cualifica para enseñar a niños de 6 a 12 años. Este programa tiene una duración de cuatro cursos (8 semestres) y ofrece formación sobre la enseñanza de las matemáticas, las ciencias experimentales y sociales y la lengua, formación básica en pedagogía y psicología y la realización de prácticas de enseñanza en las escuelas.

Durante el primer curso del programa de formación inicial (2º semestre), los futuros profesores habían cursado una asignatura sobre teoría de números (operaciones entre números naturales, fracciones, razón y proporción, divisibilidad y estadística descriptiva) y durante el segundo curso (4º semestre), otra sobre contenido geométrico. Los datos fueron recogidos mientras cursaban la asignatura Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria perteneciente al sexto semestre (3º curso), antes de estudiar el bloque sobre la enseñanza y aprendizaje de los números y operaciones donde están incluidos los aspectos sobre el razonamiento proporcional.

Instrumento

Los datos se recogieron mediante un cuestionario (tabla 1) formado por 12 problemas teniendo en cuenta los tres dominios de contenido matemático considerados: esquema fraccionario (6 problemas), distinción de situaciones proporcionales y no proporcionales (2 problemas) y comparación de razones (4 problemas). Algunos de estos problemas se seleccionaron o se modificaron de investigaciones previas (Buforn y Fernández, 2014a; Lamon, 1999, 2005; Pitta-Pantazi y Christou, 2011).

El bloque sobre el esquema fraccionario está formado por 6 problemas: *parte-todo,* pretende examinar la habilidad de los futuros maestros en identificar el uso de esta relación en un contexto discreto, entendida como la relación entre el número de partes congruentes en las que se divide un conjunto de objetos discretos y el todo (Lamon, 1999) (problema 1); *medida-recta numérica,* busca examinar la capacidad de localizar una fracción en la recta numérica en la que los denominadores son múltiplos entre sí (Pitta-Pantazi y Christou, 2011; Hanula, 2003; Marshal, 1993) (problema 2); *medida-densidad*, la capacidad de los futuros docentes en reconocer la densidad de los números racionales, es decir, que siempre es posible encontrar nuevas fracciones entre dos fracciones dadas (problema 3); *cociente*, se busca la capacidad de considerar repartos equitativos (problema 4); *razonamiento up and down*, pretende examinar la capacidad de coordinar el reconocimiento de una fracción como una unidad múltiple (a/b = a veces 1/b) para reconstruir el todo con el uso de las fracciones unitarias para representar otras fracciones (Pitta-Pantazi, Christou, 2011; Lamon, 1993) (problema 5); y finalmente, el problema *operador,* la capacidad de los futuros profesores en identificar el uso del operador inverso y la reconstrucción de la unidad en un contexto de reducciones y ampliaciones (Behr, Harel, Post y Lesh, 1993) (problema 6).

La resolución de los dos problemas del bloque B permite obtener información sobre cómo se reconoce la diferencia entre situaciones proporcionales y no proporcionales (problemas 7 y 8) (Lamon, 2007). Este bloque está formado por una situación proporcional (relaciones multiplicativas entre las cantidades) y otra no proporcional (teniendo relaciones aditivas entre las cantidades) (Hart, 1984; Karplus, Pulos y Stage, 1983). Usar situaciones proporcionales y no proporcionales nos permite determinar el abuso de la linealidad en situaciones no adecuadas que ha sido detectado en investigaciones previas (De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2007).

El bloque C, sobre comparación de razones, está formado por el problema *proceso unitizing,* que pretende examinar la manera en la que los futuros profesores usan una razón como unidad de referencia para comparar dos situaciones (problema 10); *razón,* que busca examinar la manera en la que comprenden las razones como un índice comparativo (aproximación a 1 de la razón de los lados) (problema 11); *covarianza cualitativa,* que examina la manera en que comprenden la covarianza en situaciones de comparación cualitativa (problema 12), distinguiendo entre problemas que tienen solución (problema 12a) y aquellos en la que no se puede saber (problema 12b); y el problema sobre el *pensamiento relacional*, que pretende examinar la capacidad en identificar comparaciones relativas y absolutas (problema 9).

Análisis de datos

Los datos de esta investigación son las respuestas de los futuros profesores a los 12 problemas y tienen dos objetivos: *a)* determinar en qué medida estos sub-constructos formaban parte de su conocimiento y *b)* identificar características de su conocimiento de los distintos sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional.

Las respuestas se codificaron según el siguiente criterio:

- con un 1 si el estudiante había resuelto y justificado correctamente el problema, independientemente de si había cometido un error de cálculo;
- con un 0, si el futuro maestro había resuelto de forma incorrecta el problema o lo había dejado en blanco, también las que, dando respuestas numéricamente correctas, la justificación era incorrecta.

En primer lugar, se obtuvieron los porcentajes de éxito de cada problema con el fin de determinar en qué medida estos sub-constructos formaban parte del conocimiento de los futuros profesores; en segundo lugar, con el objetivo de identificar características de su conocimiento, se realizó un análisis de conglomerados usando el programa estadístico SPSS Statistics (versión 23). Este análisis permite identificar diferentes grupos de estudiantes mediante un método jerárquico aglomerativo. De esta manera, los conglomerados nos permiten inferir grupos (perfiles) caracterizados por el conocimiento de los sub-constructos. Estos perfiles vendrán dados por un grupo de futuros profesores con respuestas similares a los doce sub-constructos considerados. Para llevar a cabo el análisis estadístico, las respuestas de un estudiante a los 12 problemas considerados, que habían sido codificadas con 0 y 1 formaban un vector de 12 componentes. Así, en el programa estadístico SPSS se introdujo una matriz de 1 y 0 de 12 columnas por 91 filas. El análisis de conglomerado se realizó utilizando como medida la distancia euclídea al cuadrado.

Resultados

Los resultados se presentan en dos apartados. En primer lugar, se muestran los porcentajes de éxito en cada sub-constructo (problema) y, en segundo, los resultados del análisis de conglomerados, que permite identificar características del conocimiento de los futuros profesores de los distintos sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional.

Nivel de éxito en cada sub-constructo del razonamiento proporcional

La tabla 2 muestra el porcentaje de éxito en cada sub-constructo del razonamiento proporcional considerado. Estos resultados señalan un comportamiento desigual de los futuros maestros en relación con los sub-constructos considerados. Estos son bastante competentes en tres de los sub-constructos del dominio del esquema fraccionario (parte-todo como medida, repartos equitativos-cociente y medida-recta numérica), en el problema proporcional en el que hay que calcular una cantidad y en el problema que implica el proceso *unitizing*. Sin embargo, tienen dificultades en distinguir las situaciones proporcionales y no proporcionales (30% de éxito en el problema de valor perdido no proporcional), en tres sub-constructos vinculados a la comparación de razones (significado de razón como índice comparativo, el reconocimiento de comparaciones relativas y absolutas y la idea de covariación cualitativa) y en tres sub-constructos del esquema fraccionario (significado de la fracción como operador, el razonamiento *up and down*, y la noción de densidad en los números racionales).

Tabla 2
Porcentaje de futuros maestros que resolvieron con éxito cada sub-constructo (N= 91)

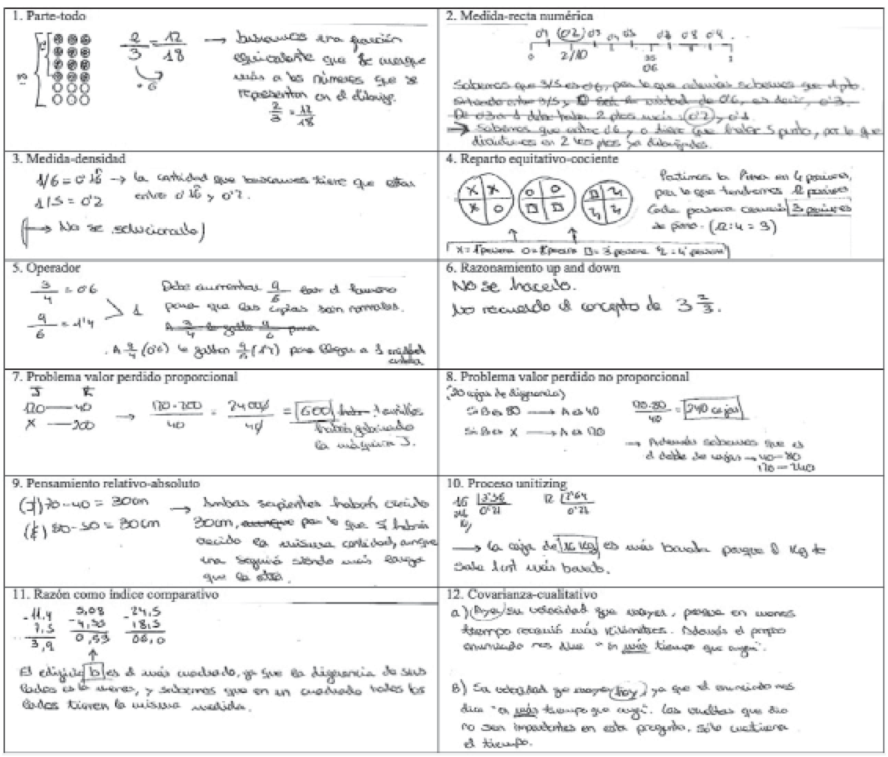
Problema	Sub-constructo	Número de EPM	Porcentaje de éxito*
6	Operador	5	5
11	Razón como índice comparativo	8	9
9	Pensamiento relativo-absoluto	11	12
5	Razonamiento *up and down*	18	20
3	Medida-densidad	24	26
8	Problema valor perdido no proporcional	27	30
12	Covarianza- cualitativo	29	32
10	**Proceso unitizing**	**65**	**71**
7	**Problema valor perdido proporcional**	**76**	**84**
2	**Medida-recta numérica**	**83**	**91**
4	**Cociente**	**87**	**96**
1	**Parte-todo**	**89**	**98**

* Los porcentajes han sido redondeados a la unidad más próxima.

Estos resultados muestran que los futuros profesores han tenido un mayor porcentaje de éxito en los problemas vinculados al significado parte-todo y en los que se pueden resolver a través de procedimientos, como el algoritmo de la división o la regla de tres. Así, el problema *cociente* se puede resolver haciendo una división (la razón vista como cociente de una división), el problema de *valor perdido proporcional* usando una regla de tres y el de *unitizing* usando también una regla de tres o realizando una división de las cantidades que forman las razones. Sin embargo, tuvieron dificultades en los sub-constructos que requieren una comprensión de los conceptos, es decir, los que implicaban tener en cuenta las cantidades y las relaciones entre las cantidades: operador inverso, razonamiento *up and down*, razón como índice comparativo, idea de covarianza en problemas cualitativos, y la distinción de situaciones proporcionales y no proporcionales. Ejemplificamos estas características a través de las respuestas de un estudiante (E040) que resolvió correctamente los problemas en los que se podía aplicar procedimientos de cálculo e incorrectamente los que implicaban reconocer relaciones entre las cantidades (figura 1).

FIGURA 1

Respuestas del estudiante E040



Este estudiante resolvió el problema *parte-todo* mediante el procedimiento de cálculo de fracciones equivalentes y los *medida-recta numérica*, *cociente* y *proceso unitizing* mediante divisiones. Así, en la *recta numérica* divide el segmento en 0.2, 0.4, 0.6,…; en el problema *cociente-reparto equitativo* realiza la división de 12 trozos entre 4 personas (12:4=3) y en el *unitizing* divide los kilos entre los euros. Sin embargo, cuando los problemas exigían la comprensión de relaciones entre cantidades tiene dificultades ya que no puede aplicar un procedimiento previamente establecido. Así, usa de manera sistemática el algoritmo de la división en el problema de *medida-densidad* y *operador* sin saber resolverlos y emplea una estrategia aditiva incorrecta en los problemas de comparar razones (que implican el *pensamiento relacional* y el significado de *razón*). Por otro lado, el problema de valor perdido proporcional lo resuelve mediante la regla de tres y usa este mismo procedimiento para resolver de manera incorrecta el de valor perdido no proporcional. Este hecho indica que no reconoce la diferencia entre las situaciones proporcionales de las no proporcionales.

Características del conocimiento del futuro maestro en relación con los sub-constructos considerados en el razonamiento proporcional

Del análisis de conglomerados (el dendograma se muestra en el anexo 1) se obtuvieron cuatro grupos de futuros profesores; la tabla 3 muestra las características de estos grupos. Existen cuatro sub-constructos que no discriminan entre los grupos: la relación parte-todo, medida-recta numérica, reparto equitativo-cociente y proceso *unitizing*, que son los sub-constructos que tuvieron mejor porcentaje de éxito y, como se ha mencionado, están vinculados con procedimientos. A partir de estos sub-constructos, se generan diferentes rasgos característicos del conocimiento de los estudiantes.

Los grupos 1 y 3 se caracterizan por tener mayor porcentaje de éxito en los sub-constructos más procedimentales (los 4 sub-constructos que no discriminan: parte-todo, medida-recta numérica, cociente y problema de valor perdido proporcional). Estos futuros profesores evidenciaron dificultades en distinguir las situaciones proporcionales de las no proporcionales y en darle significado a los conceptos de razón, proporción o covarianza. La diferencia entre estos grupos está en la manera de razonar en los problemas de valor perdido. Los estudiantes del grupo 1 (N= 55) tienen un razonamiento multiplicativo (98% de éxito en el problema proporcional y 10% de éxito en el problema no proporcional de estructura aditiva) mientras que los del grupo 3 (N= 15) tienen un razonamiento aditivo (6% de éxito en el problema proporcional y 73% de éxito en el problema no proporcional de estructura aditiva).

TABLA 3
*Identificación de cuatro grupos de futuros profesores**

Dominio	Pr	Sub-constructos	Grupo 1 N=55	Grupo 2 N=12	Grupo 3 N=15	Grupo 4 N=9
A	1	Parte-todo	96	100	100	100
A	2	Medida-recta numérica	91	100	80	100
A	4	Cociente	98	83	100	100
A	3	Densidad	25	0	6	100
A	6	Operador	0	0	0	56
A	5	Razonamiento *up and down*	5	100	6	11
B	7	Problema valor perdido proporcional	98	100	6	100
B	8	Problema valor perdido no proporcional	10	42	73	55
C	9	Pensamiento relativo-absoluto	10	8	6	33
C	12	Covarianza	27	8	33	90
C	10	Proceso *unitizing*	69	75	80	67
C	11	Razón-índice comparativo	2	8	6	56

* Los datos de la tabla están representados en porcentajes

La diferencia entre los grupos 1 y 3 y los grupos 2 y 4, es que estos dos últimos comienzan a diferenciar las situaciones proporcionales de las no proporcionales. Así, ambos grupos presentan un 100% de éxito en el problema de valor perdido proporcional y aproximadamente un 50% de éxito en el problema aditivo. La diferencia entre el grupo 2 y el 4 está en que los estudiantes del grupo 4 comienzan a resolver de manera correcta problemas que implican aspectos conceptuales de los conceptos de razón y fracción como los sub-constructos operador, razón como índice comparativo, pensamiento relativo-absoluto y covarianza. Los del grupo 2, en cambio, dan muestra de consolidar la coordinación del reconocimiento de la fracción como una unidad múltiple (a/b = a veces 1/b) con el uso de la fracción unitaria (1/n) como una unidad iterativa (razonamiento *up and down*) ya que los futuros maestros de este grupo tuvieron un 100%

de éxito, pero presentan dificultades en los aspectos conceptuales de la comparación de razones y en la idea de operador.

De los resultados del conglomerado se desprende una cierta desvinculación entre el conocimiento de los procedimientos implicados en el razonamiento proporcional (por ejemplo, la razón como la división de dos cantidades) y los significados de la idea de razón no directamente vinculados con procedimientos (razón como índice comparativo, el pensamiento relacional/absoluto e idea de covarianza). Esto se observa en los grupos 1 y 3 que fueron capaces de resolver algunos problemas a través de procedimientos desvinculados de los significados de fracción, razón o proporción, pero no pudieron diferenciar las situaciones de proporcionalidad y no proporcionalidad ni de resolver los problemas que implicaban el significado de razón no vinculado a un procedimiento.

Por otra parte, la manera en la que se han formado los conglomerados parece indicar que los futuros profesores comienzan resolviendo los problemas más procedimentales (y en particular los relacionados con el esquema fraccionario) ya que aparecen en los cuatro grupos, continúan con la distinción de situaciones proporcionales y no proporcionales (que se empieza a dar en los grupos 2 y 4 pero no en el 1 y 3), y por último adquirir los significados relacionados con los conceptos de razón y proporción (solamente los del grupo 4 son capaces de resolver problemas relacionados con la comparación de razones). Otra característica es que parece que el razonamiento *up and down* (relacionado con el esquema fraccionario) no está asociado con los sub-constructos vinculados al significado de razón, pues los grupos 2 y 4 quedan diferenciados por el éxito en el sub-constructo razonamiento *up and down* o por el éxito en los sub-constructos relacionados con el significado de razón.

Discusión y conclusiones

El objetivo de esta investigación, como ya mencionamos, es identificar características del conocimiento de los futuros profesores en los sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional. Los resultados han mostrado dos aspectos relevantes: *1)* en qué medida los sub-constructos implicados en el desarrollo del razonamiento proporcional forman parte del conocimiento de los futuros maestros y *2)* características del conocimiento del futuro docente en relación con estos sub-constructos.

El conocimiento de los futuros profesores de los diferentes sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional

Los resultados indican que los futuros maestros tuvieron, en general, éxito en la resolución de aquellos problemas que ponen en juego los sub-constructos en los que se podía aplicar un procedimiento previamente aprendido como la regla de tres o el algoritmo de la división, pero tuvieron dificultades en los que implicaban reconocer la relación entre las cantidades y no se podía aplicar un procedimiento aprendido. Esta característica fue transversal en los tres dominios considerados: esquema fraccionario, distinción de situaciones proporcionales y no proporcionales y comparación de razones, lo que indica que la dimensión procedimental-conceptual determina el conocimiento de matemáticas para enseñar, más allá de los sub-constructos específicos del razonamiento proporcional considerados.

Los futuros maestros resolvieron con éxito problemas vinculados con los diferentes dominios considerados: los relacionados con la idea parte-todo, medida-recta numérica y cociente (esquema fraccionario), la situación proporcional de valor perdido y el problema vinculado con el proceso *unitizing* (comparación de razones). Sin embargo, tuvieron dificultades con los problemas que requerían reconstruir la unidad (operador inverso y razonamiento *up and down*), reconocer una situación no proporcional y las situaciones de comparación cuantitativa y cualitativa. Estas dificultades van en la línea de estudios previos que señalaban algunas limitaciones en la comprensión de los significados de los conceptos matemáticos aunque se conocieran y usaran los procedimientos vinculados (Buforn y Fernández, 2014a; Gómez y García, 2014; Lee *et al.*, 2011; Livy y Vale, 2011). El análisis de conglomerados corrobora este resultado ya que existen cuatro sub-constructos que no discriminan entre los grupos: la relación parte-todo, medida-recta numérica, reparto equitativo-cociente y proceso *unitizing*, que son los que tuvieron mejor porcentaje de éxito y vinculados con el uso de procedimientos aprendidos. A partir de estos sub-constructos se generan diferentes rasgos característicos del conocimiento de los estudiantes.

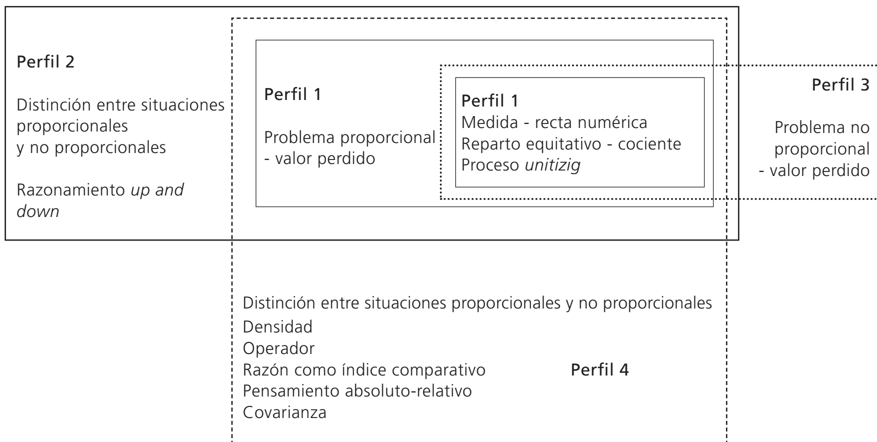
La diferencia entre la comprensión de los significados vinculados a los sub-constructos y el uso de los procedimientos como un rasgo de la manera en la que los futuros profesores conocen el dominio matemático del razonamiento proporcional sugiere dos características. Por un lado, que,aunque no han desarrollado una comprensión amplia de las ideas de fracción, razón y proporción, pueden tener éxito en algunos problemas más procedimentales que apoyan el desarrollo del razonamiento proporcional. Por otro, muestra una cierta desvinculación entre el conocimiento de los procedimientos implicados en el razonamiento proporcional y los sub-constructos vinculados a los significados de las ideas de fracción y razón no directamente vinculados a procedimientos (razón como índice comparativo, el pensamiento relacional/absoluto, razonamiento *up and down*, operador). Esta falta de relación entre lo conceptual y lo procedimental la discutiremos posteriormente.

Los resultados obtenidos tienen implicaciones relevantes para los formadores de maestros, en el sentido de definir como objetivo de los programas de estudio potenciar la comprensión conceptual de las matemáticas escolares en los alumnos.

Características del conocimiento del futuro profesor en relación con los sub-constructos implicados en el razonamiento proporcional

La manera en la que se han generado los perfiles muestra tres características del conocimiento de los futuros profesores de los sub-constructos considerados. En primer lugar, el carácter parcialmente anidado de los perfiles (figura 2). El perfil 1 está caracterizado por los cuatro sub-constructos comunes y por la resolución de los problemas proporcionales de valor perdido. El desempeño de los estudiantes en este tipo de problemas puede ser atribuido al procedimiento algorítmico que se suele introducir en las escuelas para la resolución de los problemas proporcionales (la regla de tres, multiplicar en cruz los elementos en la igualdad de dos razones). Sin embargo, el uso de este procedimiento –que proporciona la respuesta correcta en las situaciones proporcionales– no implica la capacidad de reconocer cuándo la relación entre las cantidades en una situación es o no proporcional (los de este perfil no resuelven correctamente el problema no proporcional). El perfil 3 está caracterizado por los cuatro sub-constructos comunes y por la resolución del problema no proporcional. Este grupo de futuros profesores tampoco es capaz de reconocer la diferencia entre las situaciones proporcionales y no proporcionales (pues no tienen éxito en el problema proporcional). La característica de este grupo es que usan un razonamiento aditivo en situaciones que requieren un razonamiento multiplicativo.

FIGURA 2
Carácter anidado de los perfiles de conocimiento sobre los sub-constructos del razonamiento proporcional en los futuros profesores



Los perfiles 2 y 4 añaden al perfil 1 el diferenciar las situaciones proporcionales y no proporcionales. Este resultado muestra que la capacidad de reconocer las relaciones no proporcionales entre las cantidades es un elemento clave en la configuración del conocimiento de los futuros profesores en el dominio del razonamiento proporcional que constituye la clave para la caracterización de los perfiles 2 y 4; sin embargo, ambos tienen diferencias entre sí. El perfil 2 añade al 1 la capacidad de coordinar el reconocer una fracción como unidad múltiple para reconstruir el todo con el uso de la fracción unitaria como unidad iterativa para representar una fracción (es decir la capacidad de razonamiento *up and down*). Esta capacidad representa un nivel alto de la comprensión de la idea de fracción desde la perspectiva parte-todo en un contexto de medida al estar vinculada al significado de la idea de fracción como unidad iterativa. Desarrollar este tipo de razonamiento es necesario para consolidar el esquema fraccionario, sin embargo, este esquema no llega a consolidarse al obtener los estudiantes de este perfil un 0% de éxito en la tarea operador. Los resultados sugieren que la idea de fracción como operador inverso está desvinculada del significado de la idea de razón con escasa aportación al desarrollo del razonamiento proporcional. Este hecho es relevante ya que cuando la tarea usada es con el operador directo entonces la vinculación con la idea de razón es mayor (Pitta-Pantazi y Christou, 2011). El perfil 4 incorpora al perfil 1 el éxito en aspectos conceptuales de razón y fracción como los sub-constructos operador, razón como índice comparativo, pensamiento relativo-absoluto y covarianza.

La manera en la que se han formado los conglomerados indica que los futuros profesores comienzan resolviendo los problemas más procedimentales (y en particular los relacionados con el esquema fraccionario) ya que aparecen en los cuatro grupos usando un razonamiento multiplicativo (perfil 1) o uno aditivo (perfil 3), continúan con la distinción de situaciones proporcionales y no proporcionales (que se empieza a dar en los grupos 2 y 4 pero no en el 1 y 3), y por último comienzan a adquirir los significados relacionados con los conceptos de razón y proporción (solamente los estudiantes del perfil 4 mostraron capacidad de resolver los problemas relacionados con el significado de razón).

La segunda característica muestra una cierta desvinculación entre el conocimiento de los procedimientos implicados en el razonamiento proporcional (por ejemplo, la razón como la división de dos cantidades; el uso de la regla de tres) y los significados de la idea de razón no directamente vinculadas a procedimientos (razón como índice comparativo, el pensamiento relacional/absoluto e idea de covarianza). Esto se observa en los grupos 1 y 3, donde los futuros profesores mostraron capacidad de resolver algunos problemas a través de procedimientos desvinculados con los significados de fracción, razón o proporción, pero no fueron capaces de distinguir las situaciones de proporcionalidad y no proporcionalidad ni de resolver los problemas que implicaban el significado de razón no vinculado a un procedimiento. Estos resultados sugieren que un objetivo en los programas de formación de maestros debería ser conseguir que los perfiles 2 y 4 puedan complementar los perfiles 1 y 3 mediante el desarrollo de la habilidad de reconocer las relaciones de proporcionalidad o no entre las cantidades (Lamon, 2005; Rivas *et al.*, 2012; Berk *et al.*, 2009).

Finalmente, la tercera característica es que parece que el razonamiento *up and down* que se apoya en el uso de las fracciones unitarias como unidades iterativas permitiendo la construcción de fracciones impropias no está relacionado con los sub-constructos vinculados al significado de razón. Esto se evidencia en los grupos 2 y 4, que quedan diferenciados por el éxito en el sub-constructo razonamiento *up and down* o por el éxito en los sub-constructos relacionados con el significado de razón.

Las características que definen los perfiles de los futuros profesores sugieren que el conocimiento de matemáticas necesario para apoyar el desarrollo del razonamiento proporcional va más allá de plantear proporciones y calcular soluciones correctas a problemas proporcionales de valor perdido (Cramer, Post y Currier, 1993; Vergnaud, 1988). De esta manera, la necesaria complementariedad entre los perfiles 1 y 3 por un lado, y 2 y 4, por otro, define un objetivo de aprendizaje en los programas de formación de maestros que se puede conseguir desarrollando la comprensión del uso de los procedimientos en determinadas situaciones (Star, 2005). Por ejemplo, diferentes métodos para resolver un problema de proporcionalidad de valor perdido pueden permitir generar la flexibilidad en el uso de múltiples métodos para resolver los problemas proporcionales y determinar la eficacia de métodos particulares más eficientes que otros para determinados problemas, apoyado en el reconocimiento de la relación de covarianza entre las cantidades (Berk *et al.*, 2009; Rivas *et al.*, 2012). De esta manera, colocar el foco sobre la relación entre el procedimiento y la pertinencia de su uso en relación con la identificación de las relaciones entre las cantidades y la covariación puede permitir que la distinción de las situaciones proporcionales y no proporcionales sea visto como un avance conceptual en el conocimiento de los maestros, permitiendo integrar el aspecto conceptual y procedimental de la fracción, razón y proporción como un aspecto clave del conocimiento necesario para enseñar matemáticas.

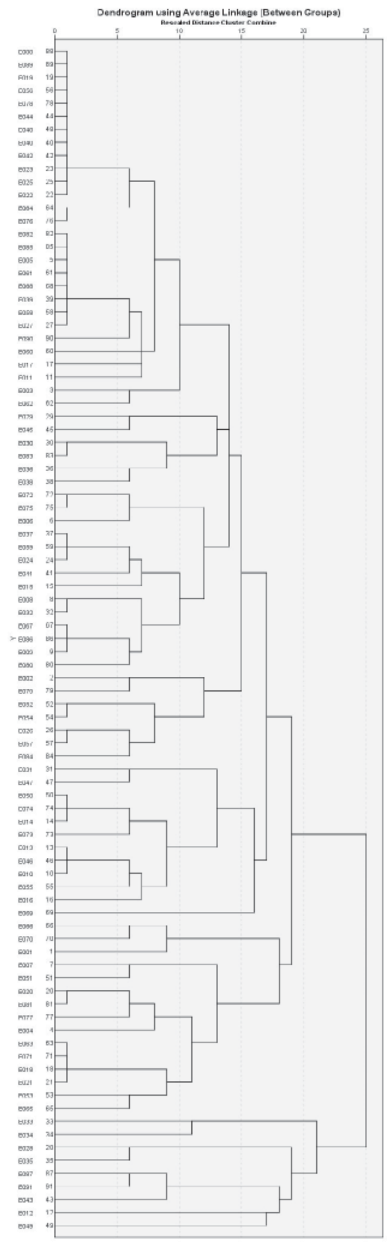
Estos resultados proporcionan información para el diseño de tareas profesionales vinculadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria en los programas de formación de maestros. Como estudios futuros se plantea la necesidad de examinar la relación entre el conocimiento que tienen los futuros profesores y el uso de este conocimiento en la realización de tareas profesionales, como puede ser la de interpretar la comprensión de los alumnos de primaria.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España y de grupos de investigación emergentes GV/2015/115 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Una versión preliminar de los porcentajes de éxito de los problemas ha sido presentada en el II CEMACYC, Cali, noviembre 2017.

Anexo 1



Referencias

Ball, D.; Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). "Content knowledge for teaching. What makes it special?", *Journal of Teacher Education,* vol. 59, núm. pp. 389-407.

Behr, M. J.; Harel, G.; Post, T. y Lesh, R. (1992). "Rational number, ratio, and proportion", en D.A. Grouws (eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Nueva York: MacMillan Publishing Company, pp. 296-333.

Behr, M. J.; Harel, G.; Post, T. y Lesh, R. (1993). "Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct", en T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), *Rational numbers: An integration of research*, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 13-47.

Ben-Chaim, D.; Fay, J. T.; Fitzgerald, M. W.; Benedetto, C. y Miller, J. (1998). "Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experience", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 36, núm. 3, pp. 247-273.

Berk, D.; Taber, S.; Carrino-Gorowara, C. y Poetzl, C. (2009). "Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning", *Mathematical Thinking and Learning,* vol. 11, núm. 3, pp. 113-135.

Buforn, A. y Fernández, C. (2014a). "Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de Primaria en relación al razonamiento proporcional", *BOLEMA,* vol. 28, núm. 48, pp. 21-41.

Buforn, A. y Fernández, C. (2014b). "La coordinación de la idea de unidad en la representación de fracciones impropias", *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* (pp.491-500), Baeza: CEAM.

Cramer, K.; Post, T. y Currier, S. (1993). "Learning and teaching ratio and proportion: Research implications", en D. T. Owens (ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics,* Nueva York: Macmillan, pp. 159-178.

De Bock, D.; Van Dooren, W.; Janssens, D. y Verschaffel, L (2007). *The Illussion of the Linearity. From analysis to Improvement*, Londres: Springer.

Ekawati, R.; Lin, F. y Yang, K. (2015). "Developing an instrument for measuring teachers' mathematics content knowledge on ratio and proportion: A case of Indonesian primary teachers", *International Journal of Science and Mathematics Education,* vol. 13, supplement 1, pp. 1-24.

Fernández, C. y Llinares, S. (2010). "Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón", *Horizontes Educacionales,* vol. 15, núm. 1, pp. 11-22.

Fernández, C.; Llinares, S. y Valls, J. (2013). "Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving", *The Mathematics Enthusiast,* vol. 10, núms. 1 y 2, pp. 441-468.

Gómez, B. y García, A. (2014). "Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales", en M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (eds.), *Investigación en Educación Matemática*, vol. XVIII, Salamanca: SEIEM, pp. 375-384.

Hannula, M. S. (2003). "Locating fraction on a number line", en N.A. Pateman, B.J. Dougherty, y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th conference of the international group for the psychology of mathematics education,* vol. 3, Honolulu: PME, pp. 17-24.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors*, Windsor: NFER Nelson.

Hill, H.; Ball, D. y Schilling, S. (2008). "Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 39, núm. 4, pp. 372-400.

Hill, H.; Sleep, L.; Lewis, J. y Ball, D. (2007). "Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts?", en F.K. Lester Jr. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Charlotte: IAP-NCTM, pp. 111-156.

Kaput, J. y Maxwell, M. (1994). "Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns", en G. Harel y J. Confrey (eds.), *The development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics,* Nueva York: Sunny Press, pp. 237-292.

Karplus, R.; Pulos, S. y Stage, E. (1983), "Proportional reasoning of early adolescents", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Nueva York: Academic, pp. 45-90.

Lamon, S. (1993). "Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes", en T. Carpetner, E. Fennema, y T. Romberg (eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research,* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Pub, pp. 131-156.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, Asso.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers,* 2da. ed., Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (2007). "Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework", en F.K. Lester Jr. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Charlotte: NCTM-Information Age Publishing, pp. 629-668.

Lee, S. J.; Brown, R. E. y Orrill, C. H. (2011). "Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 13, núm. 3, pp. 198-220.

Livy, S. y Vale, C. (2011). "First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question", *Mathematics Teacher Education and Development,* vol. 13, núm. 2, pp. 22-43.

Marshall, S. P. (1993). "Assessment of rational number understanding: A schema-based approach", en T. P. Carpenter, E. Fennema, y T. A. Romberg (eds.), *Rational numbers: An integration of research,* Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. pp. 261-288.

Modestou, M. y Gagatsis, A. (2010) "Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning". *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 12, núm. 1, pp. 36-53.

Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2011). "The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning", *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 14, núm. 2, pp. 149-169.

Post, T.R.; Harel, G.; Behr, M. y Lesh, R. (1988). "Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts", en E. Fennema, T. Carpenter y S. Lamon, S. (eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics,* Ithaca: SUNY Press, pp. 177-198.

Rivas, M. A.; Godino, J. D. y Castro, W. F. (2012). "Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros profesores de Primaria", *BOLEMA,* vol. 26, núm. 42B, pp. 559-588.

Rowland, T.; Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). "Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi", *Journal of Mathematics Teacher Education*, núm. 8, pp. 255-281. DOI: 10.1007/s10857-005-0853-5

Star, J. R. (2005). "Reconceptualizing procedural knowledge", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 36, núm. 5, pp. 404-411.

Van Dooren, W.; De Bock, D.; Janssens, D. y Verschaffel, L. (2008). "The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 39, núm. 3, pp. 311-342.

Vergnaud, G. (1988). "Multiplicative structures", en Hiebert, H. y Behr, M. (eds.), *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Hillsdale: Lawrence Erlbaum, pp. 141-161.

Artículo recibido: 20 de abril de 2017
Dictaminado: 24 de julio de 2017
Segunda versión: 15 de septiembre de 2017
Comentarios: 2 de octubre de 2017
Aceptado: 11 de octubre de 2017